
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

М. А. Артемов, Р. Г. Меджидов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются варианты математического моделирования тонкого вращающегося диска в рамках приближения плоского напряженного состояния. Считается, что материал диска однородный, изотропный, проявляет упругие и пластические свойства. Принимается гипотеза о естественном состоянии. Рассматриваются кусочно-линейные и гладкие функции пластичности. Упругие свойства материала определяются линейным законом Гука. Пластические деформации и напряжения связаны ассоциированным законом пластического деформирования. При рассмотрении гладких функций пластичности выбирается условие пластичности Поля. Показано, что чем точнее кривая пластичности Поля аппроксимирует шестиугольник Треска, тем больше значения градиента вектора перемещений в малой окрестности центра диска. Обсуждаются выбор корректных условий для напряжений и перемещений в центре диска. Приводятся графики напряжений, деформаций, перемещений, а также годограф вектора напряжений для разных вариантов выбираемых определяющих уравнений. Дается сравнение полученных результатов с результатами других авторов для рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: вращающиеся диски, плоское напряженное состояние, ассоциированный закон пластического деформирования, эквивалентная деформация, эквивалентное напряжение, годограф вектора напряжений, гладкие функции пластичности, малые деформации, идеальное упругопластическое тело, математическое моделирование.

Введение

Задача об упругом и упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска рассматривалась многими авторами. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что вращающиеся диски являются важными элементами многих конструкций и машин. Результаты математического моделирования вращающихся дисков содержатся в ряде монографий и учебников, например, [1-6], а также в многочисленных научных статьях. Следует отметить работу [7] о вращающемся сплошном диске, в которой было предложено вместо условия пластичности Треска выбирать условие пластичности максимального касательного напряжения с учетом изотропного упрочнения. Это предложение было учтено в ряде работ [8]. В настоящей работе дается оценка результатов, приведенных в работе [9].

1. Плоское напряженное состояние

Известно, что задачу плоского напряженного состояния относят к общей плоской задаче и не рассматривают как частный случай трехмерной задачи [10]. Для общей плоской задачи, когда функция текучести $F(\sigma_1, \sigma_2)$ совпадает с пластическим потенциалом получается, что для несжимаемого идеального пластического тела $\partial F / \partial \sigma_1 + \partial F / \partial \sigma_2 = 0$. В [11] отмечается, что соотношения общей плоской задачи можно рассматривать, как частный случай пространственной задачи, однако, некоторые предположения общей плоской задачи являются противоречивыми. В [12], в частности и для тонких дисков, показано, что при выполнении определенных требований относительно параметров, характеризующих нагрузку, при переходе от точных величин к осредненным по толщине диска величинам, получаются соотношения для обобщенного плоского напряженного состояния.

Для формул Коши средняя осевая деформация $\varepsilon_z = \frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial w}{\partial z} dz$, среднее перемещение $\frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} w dz = 0$, изменение толщины диска определяется через среднюю деформацию. Вычисление производных функции пластичности по напряжениям проводится до процедуры осреднения напряжений в функции пластичности.

2. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций, в приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача об определении напряженного и деформированного состояния тонкого диска, вращающегося с угловой скоростью ω . Выбирается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$. Выбирается модель однородного изотропного идеального упругопластического тела. Исходя из постановки задачи, в терминах осредненных величин, будет выполняться рассмотрение упругопластического тонкого вращающегося диска.

3. Выбор характерных масштабов

При решении задачи все соотношения записываются для безразмерных величин. В качестве масштаба для величин, имеющих размерность напряжений, выбирается значение предела пластичности на одноосное растяжение k . В качестве масштаба длины выбирается значение радиуса диска. В безразмерном виде уравнение баланса импульса в дифференциальной форме содержит безразмерный комплекс $m = \gamma b^2 \omega^2 / (kg)$, где γ — объемный вес, g — ускорение свободного падения, b — радиус диска, ω — угловая скорость вращения диска.

4. Математическая модель упругого состояния

С учетом сделанных предположений математическая модель решаемой задачи включает следующие соотношения:

– уравнение движения (уравнение равновесия в собственной системе отсчета [4])

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho. \quad (1)$$

– соотношения закона Гука, определяющие линейную зависимость упругих деформаций и напряжений (в упругой области диска при отсутствии необратимых деформаций $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$ упругие деформации являются полными)

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= E(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^p) = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta^e &= E(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^p) = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z^e &= E(\varepsilon_z - \varepsilon_z^p) = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

– условие совместности полных деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \quad (3)$$

– соотношения Коши, определяющие малые деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \quad (4)$$

5. Математическая модель пластического состояния

В случае плоского напряженного состояния функция пластичности

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z)|_{\sigma_z=0} = f(\sigma_\rho, \sigma_\theta).$$

Выбор функции пластичности в качестве пластического потенциала определяет ассоциированный закон [13]. Приращения пластических деформаций $\Delta\varepsilon_\rho^p, \Delta\varepsilon_\theta^p, \Delta\varepsilon_z^p$ связаны пропорциями, которые следуют из ассоциированного закона пластического деформирования [14])

$$\frac{\Delta\varepsilon_\rho^p}{(\partial F / \partial \sigma_\rho)|_{\sigma_z=0}} = \frac{\Delta\varepsilon_\theta^p}{(\partial F / \partial \sigma_\theta)|_{\sigma_z=0}} = \frac{\Delta\varepsilon_z^p}{(\partial F / \partial \sigma_z)|_{\sigma_z=0}}. \quad (5)$$

В пластической области полные деформации включают обратимые (упругие) и необратимые (пластические) деформации.

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p. \quad (6)$$

В случае малых деформаций используем формулы Коши

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad (7)$$

соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta^e &= \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z^e &= -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Необратимые деформации на каждом новом этапе нагружения определяются суммой необратимых остаточных деформаций и приращений пластических деформаций. Если на момент нагружения необратимых деформаций нет, то

$$\varepsilon_\rho^p = \Delta\varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta^p = \Delta\varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z^p = \Delta\varepsilon_z^p.$$

Также в пластической области выполняются соотношения (1)–(4).

6. Эквивалентное напряжение

Для суммарной оценки напряженного состояния в упругой области определяется эквивалентное напряжение. Использование эквивалентного напряжения позволяет вводить понятие нагружения, нейтрального нагружения и разгрузки для упругого состояния. Для упругопластического тела эквивалентное напряжение совпадает с функцией пластичности.

7. Напряжения и перемещения в упругой области диска

Если в упругой области нет остаточных необратимых деформаций, то решение задачи о вращающемся диске известно [6] и с точностью до неопределенных величин A, B имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8} m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8} m\rho^2, \\ Eu &= (1-\nu)A\rho + \frac{1+\nu}{\rho} B - \frac{1-\nu^2}{8} m\rho^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Неопределенные величины A, B определяются из граничных условий и/или из условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах, если таковые имеются. Так для диска, полностью находящегося в упругом состоянии при условии $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8} m(b^2 - \rho^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} m \left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \rho^2 \right), \\ Eu &= (1-\nu) \left(\frac{3+\nu}{8} b^2 - \frac{1-\nu^2}{8} \rho^2 \right) m\rho.\end{aligned}\quad (10)$$

Когда в результате изменения нагрузки некоторая область диска из пластического состояния переходит в упругое, тогда условие совместности деформаций можно представить в виде

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta^e}{d\rho} + \varepsilon_\theta^e - \varepsilon_\rho^e + \rho \frac{d\varepsilon_\theta^p}{d\rho} + \varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\rho^p = 0. \quad (11)$$

Учитывая соотношения закона Гука и уравнение движения уравнение (8) примет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho + \rho \frac{dE\varepsilon_\theta^p}{d\rho} + E\varepsilon_\theta^p - E\varepsilon_\rho^p + \nu m\rho^2 = 0.$$

8. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Треска

В работе [9] в рамках теории малых деформаций рассматривалась задача о вращающемся диске для режима $\sigma_\theta = k$, $0 \leq \sigma_\rho \leq k$ условия Треска и выборе ассоциированного закона пластического течения. Принималось, что в области $0 \leq \rho \leq c$ реализуется пластическое состояние, а в области $c \leq \rho \leq b$ — упругое. Решалась переопределенная задача, включающая шесть условий на разных границах:

$$\begin{aligned}1) \quad u|_{\rho=0} &= 0, & 2) \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} &= 0, \\ 3) \quad [\sigma_\rho]|_{\rho=c} &= 0, & 4) \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} &= 0, \\ 5) \quad [u]|_{\rho=c} &= 0, & 6) \quad \varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь скобки $[\]$ обозначают скачек рассматриваемой величины при переходе через указанную границу.

В пластической области из условия симметрии поля напряжений в центре диска

$$\sigma_\theta|_{\rho=0} = \sigma_\rho|_{\rho=0}. \quad (13)$$

Поэтому компоненты тензора напряжений

$$\sigma_\rho = k - \frac{1}{3} m\rho^2, \quad \sigma_\theta = k. \quad (14)$$

К (14) также приходим, если использовать условие ограниченности радиального напряжения в центре диска.

Для рассматриваемого режима пластичности следствием ассоциированного закона течения (с учетом гипотезы о естественном состоянии) является равенство

$$\varepsilon_\rho^p = 0.$$

Учитывая, что $\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e$, соотношения Коши для полных деформаций, соотношения закона Гука, получается, что радиальные перемещения в пластической области

$$Eu = (1-\nu)k\rho - \frac{1}{9} m\rho^3 + C.$$

В работе [9] принималось первое условие в (12), что приводило к равенству

$$Eu = (1-\nu)k\rho - \frac{1}{9}m\rho^3,$$

а также к

$$E\varepsilon_\theta^p = -\frac{1+3\nu}{9}m\rho^2, \quad (15)$$

$$\varepsilon_z^p = -\varepsilon_\theta^p.$$

На упругопластической границе условие $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0$ не выполняется. При выполнении условий 2)–4) в (12) условие 5) непрерывности перемещений на границе $\rho = c$ не будет выполняться. На основании приведенных результатов в работе [9] делается вывод о неприемлемости условия пластичности Треска для решения рассматриваемой задачи.

Если отбросить условие $u|_{\rho=0} = 0$, то в упругой области

$$\sigma_\rho = k + \frac{1+3\nu}{12} \left(c^2 - \frac{c^4}{2\rho^2} - \frac{3\mu}{2}\rho^2 \right) m, \quad \mu = \frac{3+\nu}{1+3\nu},$$

$$\sigma_\theta = k + \frac{1+3\nu}{12} \left(c^2 + \frac{c^4}{2\rho^2} - \frac{3}{2}\rho^2 \right) m,$$

$$Eu = \frac{1+3\nu}{12} \left(\frac{1+\nu}{2} \frac{c^2}{\rho} + (1-\nu)\rho \right) mc^2 - \frac{1-\nu^2}{8} m\rho^3 + (1-\nu)k\rho.$$

в пластической области, учитывая $\varepsilon_\theta^p|_{\rho=c} = 0$,

$$\sigma_\rho = k - \frac{1}{3}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = k,$$

$$Eu = (1-\nu)k\rho + \left((1+3\nu)c^3 - \rho^3 \right) \frac{m}{9}, \quad (16)$$

$$E\varepsilon_\theta^p = \frac{1+3\nu}{9} \frac{c^3 - \rho^3}{\rho} m,$$

$$\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z^p = -2\varepsilon_\theta^p.$$

В данном случае выполняется все условия (12) кроме первого. $[u]|_{\rho=c} = 0$. После подстановки в условие $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ формулы для радиального напряжения в упругой области, получаем формулу для вычисления радиуса упругопластической границы, когда $\rho = c = b$.

$$c = \sqrt{b^2 - 2b \sqrt{\frac{2}{1+3\nu} \left(\frac{3k}{m} - b^2 \right)}}. \quad (17)$$

Диск переходит в предельное состояние, когда $c = b$. Из (17) определяем

$$m = m_{\max} = \frac{3k}{b^2}.$$

В рамках теории малых деформаций граничные условия формулируются для отсчетной конфигурации тела. Однако, формулы в (16) показывают, что при $\rho \rightarrow 0$ осевая пластическая деформация $\varepsilon_z^p \rightarrow -\infty$. Происходит сильное утонение диска и в центре диска, в результате чего нарушается сплошность $Eu|_{\rho=0} = \frac{1+3\nu}{9}mc^3$. Ниже будет дано объяснение этого эффекта, характерного для всех кусочно-гладких функций пластичности идеального упругопластического тела, если в центре диска будет выполняться сингулярный режим пластичности. Отметим, что обязательный выбор условия $u|_{\rho=0} = 0$ при выборе условия Треска не подтверждается выводами работы [4].

9. Напряженно-деформированное состояние диска. Условие Поля

В качестве некоторого обобщения условия пластичности Мизеса в [15] было предложено условие пластичности вида

$$F = \left(\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (\sigma_\theta - \sigma_z)^{2n} + (\sigma_z - \sigma_\rho)^{2n}}{2} \right)^{1/2n} = k, \quad n \in N. \quad (18)$$

$$F|_{\sigma_z=0} = f(\sigma_\rho, \sigma_\theta).$$

При $n \rightarrow \infty$ поверхность пластичности (18) переходит в поверхность пластичности Треска. При $n = 1$ поверхность пластичности (18) переходит в поверхность пластичности Мизеса. Известны и другие варианты степенных условий пластичности, например, [15, 16].

В пластической области $0 \leq \rho \leq c$ задача

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \\ f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = k \end{cases} \quad (19)$$

статически определимая. В центре диска

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = k.$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования следует связь между компонентами тензора пластических деформаций

$$\Delta \varepsilon_\rho^p = \frac{\partial f / \partial \sigma_\rho}{\partial f / \partial \sigma_\theta} \Delta \varepsilon_\theta^p.$$

Если до приложения нагрузки в диске нет необратимых остаточных деформаций, то

$$\varepsilon_\rho^p = \Delta \varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta^p = \Delta \varepsilon_\theta^p.$$

Выражая пластические деформации через полные и упругие деформации, учитывая соотношения закона Гука и формулы Кош получаем дифференциальное уравнение для определения перемещения в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho} - \sigma_\rho + \nu\sigma_\theta - \frac{\partial f / \partial \sigma_\rho}{\partial f / \partial \sigma_\theta} \left(\frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho \right) = 0.$$

Если при изменении нагрузки в диске возникает область повторного пластического деформирования, в которой имеются необратимые остаточные деформации $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$, то

$$\Delta \varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e - \varepsilon_\rho^p, \quad \Delta \varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e - \varepsilon_\theta^p,$$

В этом случае уравнение для определения перемещения

$$\frac{dEu}{d\rho} - \sigma_\rho + \nu\sigma_\theta - \varepsilon_\rho^p - \frac{\partial f / \partial \sigma_\rho}{\partial f / \partial \sigma_\theta} \left(\frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho - \varepsilon_\theta^p \right) = 0.$$

На упругопластической границе $\rho = c$ должно выполняться условие непрерывности перемещений

$$[u]|_{\rho=c} = 0.$$

10. Результаты численных вычислений

Значение параметра m , соответствующее зарождению пластической области, учитывая (7), определяется по формуле

$$m = m_0 = \frac{8k}{(3+\nu)b^2}.$$

Поскольку безразмерный предел пластичности $k = 1$ и безразмерный радиус диска $b = 1$, то

$$m_0 = m_0(\nu).$$

Обозначим радиус упругопластической границы через c . Тогда из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе получаем формулы

$$A = \frac{\sigma_\theta^{(c)} + \sigma_\rho^{(c)}}{2} + \frac{1+\nu}{4} mc^2,$$

$$B = \frac{\sigma_\theta^{(c)} - \sigma_\rho^{(c)}}{2} c^2 - \frac{1+\nu}{4} mc^4,$$

где $\sigma_\theta^{(c)}, \sigma_\rho^{(c)}$ значения напряжений в пластической области на границе $\rho = c$, определяемые при решении задачи (19). Радиус упругопластической границы определяется при выполнении граничного условия

$$\sigma_\rho |_{\rho=b} = 0.$$

Максимальное значение параметра $m = m_{\max}$, когда весь диск переходит в предельное пластическое состояние, определяется из условия $c = b$.

На рис. 1 – рис. 4 показаны графики компонентов тензора напряжений, вектора перемещений и тензора пластических деформаций и годограф вектора напряжений для разных значений параметра n .

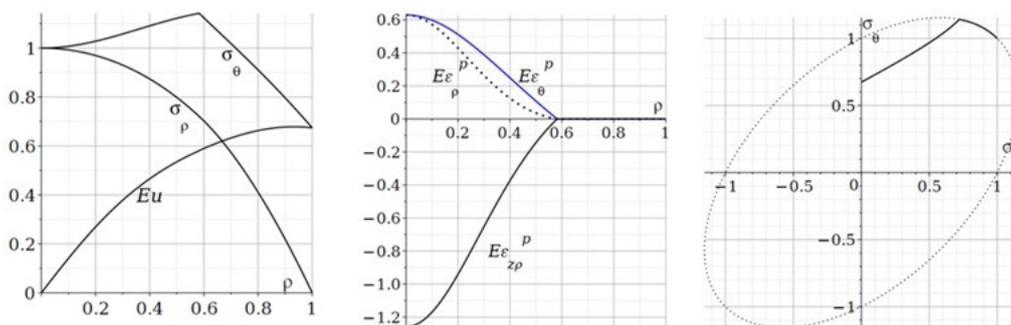


Рис. 1. $n = 1, m = 3, \nu = 0.2, c = 0.5$

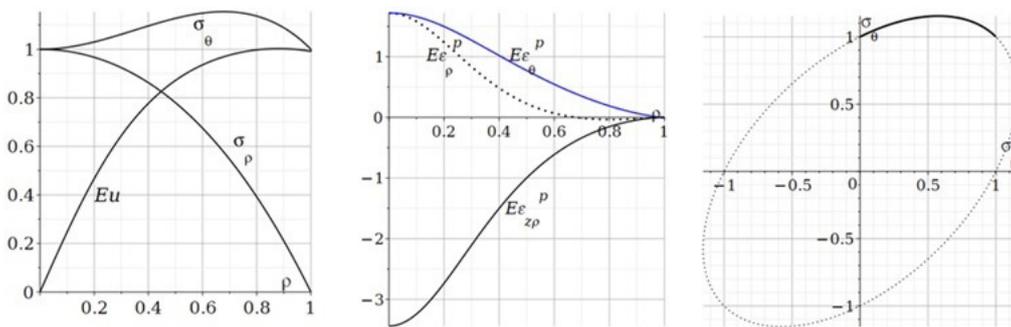


Рис. 2. $n = 1, m = 3.2582, \nu = 0.2$

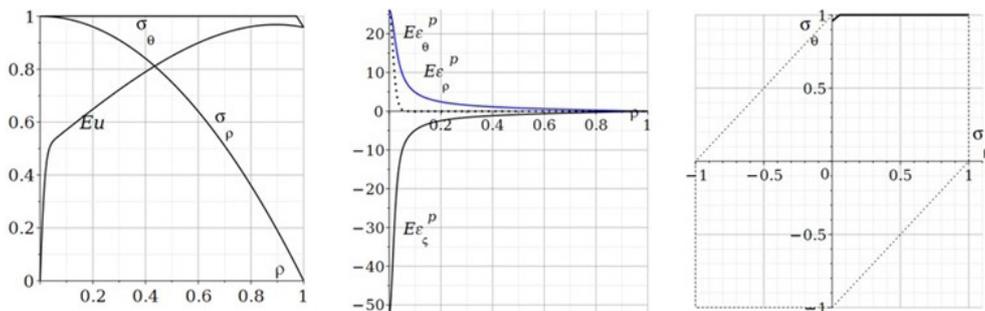


Рис. 3. $n = 600, m = 3, c = 0.9731$

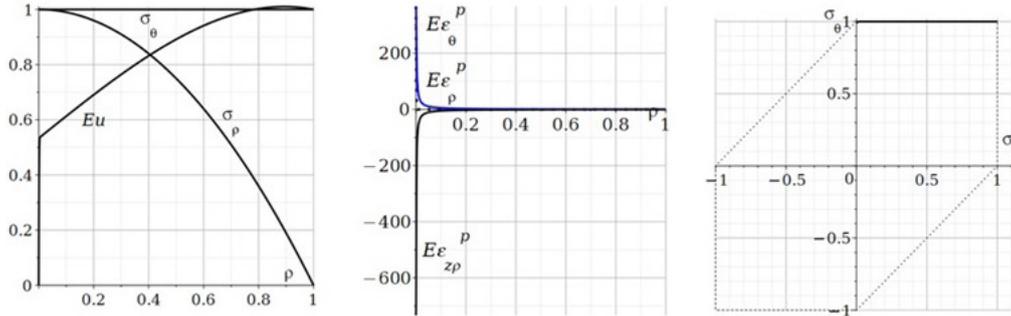


Рис. 4. $n = 10^5$, $m = 3.00001$, $c = b$

Полученные результаты показывают, что выбор гладкой функции пластичности, с необходимой степенью точности аппроксимирующей функцию пластичности Треска, предсказывает появление больших деформаций в центре диска. А это не согласуется с использованием приближения о малых деформациях. Поэтому утверждение Гамера в [7] о неприемлемости использования условия Треска вообще, нельзя признать полными.

11. Уменьшение значения параметра нагрузки

Рассмотрим вопрос о состоянии диска при уменьшения значения параметра m от m_{\max} до нулевого значения. Когда $\nu = 0.2$, $n = 10^5$, $m = 3.00001$, $c = 1$. диск полностью находится в пластическом состоянии. При уменьшении значения параметра m диск переходит в упругое состояние.

Обозначим через $\sigma_\rho^{(l)}$, $\sigma_\theta^{(l)}$ напряжения в пластической области до начала процесса уменьшения параметра m .

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \tag{20}$$

$$\rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho - \left(\rho \frac{d\sigma_\theta^{(l)}}{d\rho} + \sigma_\theta^{(l)} - \sigma_\rho^{(l)} \right) + \nu(m - m^{(l)})\rho^2 = 0,$$

В уравнениях (20) m — текущее значение, $m^{(l)}$ — значение при определении $\sigma_\rho^{(l)}$, $\sigma_\theta^{(l)}$.

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = \sigma_\rho^{(0)}. \tag{21}$$

Задача (20), (21) решается численно. Значение $\sigma_\rho^{(0)}$ выбирается так, чтобы были выполнены условия непрерывности.

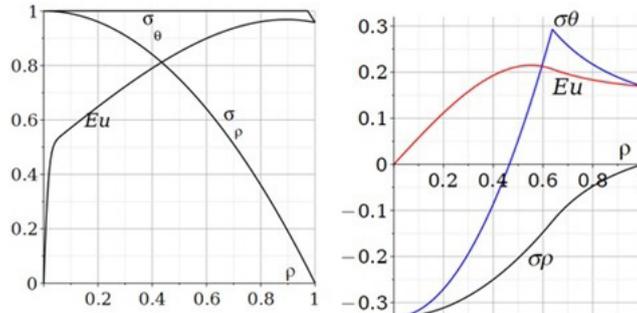


Рис. 5. $n = 600$, $m = 3$, $c = 0.9731$, $m = 0$

Заключение

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что при выборе условия пластичности Поля все искомые величины для задачи о вращающемся диске остаются непрерывными.

При увеличении значения параметра n в центре диска происходит увеличение значений деформаций, что приводит к утонению диска. Графики пластических деформаций на рис. 1 – рис. 4 позволяют оценить изменение их значений при увеличении параметра n . При $n = 1$ (условие пластичности Мизеса) пластические деформации в центре того же порядка, что и упругие деформации. При $n > 10^2$ и более пластически деформации, а следовательно, полные деформации, в окрестности центра диска нельзя считать малыми, что нарушает положения и следствия используемой теории малых деформаций. В случае плоского напряженного состояния идеально пластических тел для кусочно-линейных пластических потенциалов при реализации сингулярных режимов происходит разрыв радиальной пластической деформации.

Литература

1. Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. – Москва : Объединенное научно-техническое издательство, 1936. – 280 с.
2. Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – Москва : Машиностроение, 1978. – 247 с.
3. Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин / А.В. Левин. – Москва : Госэнергоиздат, 1963. – 624 с.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
5. Calladine C. R. Engineering Plasticity / C. R. Calladine – Oxford, England : Pergamon Press, 1969. – 337 p.
6. Chakrabarty J. Theory of Plasticity / J. Chakrabarty – Oxford, England : Elsevier Butterworth – Heinemann, – 2006. – 882 p.
7. Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk / Gamer U. // Ingenieur-Archiv. – 1984. – Vol. 54, Iss. 5. – P. 345–354. – DOI: 10.1007/BF00532817.
8. Eraslan A. N. Stress distributions in elastic-plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and vonMises criteria. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. - 85, No. 4, 252 – 266.
9. Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk / U. Gamer. // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, Iss. 2. – P. 676–678. – DOI: 10.1115/1.3167110.
10. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М. : Наука. 1962. 432 с.
11. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва : изд-во: Наука, 1966. – 233 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.
13. Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. 1971 Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971. – 482 p.
14. On stress/strain state in a rotating disk. Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovskii E.S., Shashkin A.I. // Journal of Physics: Conference Series, Vol 1203 – 2019. 8p. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001.
15. Поль Б. Критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение: Математические основы теории разрушения. – 1975. – Москва : Мир. – Т. 2 : сб. науч. трудов. – С. 336–520.
16. Karafillis A.P., Boyce M.C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol 41. – P. 1859–1886. – DOI: 10.1016/0022-5096(93)90073-O.
17. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina, E. S. Baranovskii, A. I. Shashkin // Journal of Physics: Conference Series, Vol 1479. – 2020. – DOI 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А. С. Бегун

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
Владивостокский государственный университет*

Аннотация. В рамках модели больших упругопластических деформаций рассматривается процесс деформирования несжимаемой пластины при возрастающем изгибающем моменте. Предполагается, что изгиб происходит в условиях плоской деформации. Считается, что каждая линия в поперечном сечении пластины переходит в соответствующую дугу окружности. Для описания недеформированного и деформированного состояний пластины используются декартова прямоугольная и цилиндрическая системы координат соответственно. Найдены условия начала пластического течения и закономерности его развития, рассчитаны поля напряжений и деформаций.

Ключевые слова: цилиндрический изгиб, большие деформации, упругопластический материал.

Введение

Изгиб упругопластической пластины представляет теоретический и практический интерес, поэтому рассматривался неоднократно [1–4 и др.]. Классические решения основаны на теории Кирхгофа — Лява и описывают поведение пластин при малых перемещениях и деформациях. Одного современные технологии требуют расчета, учитывающего большие деформации, как обратимые, так и необратимые. Решения для чисто упругого конечного изгиба в условиях плоского деформированного состояния представлены в [1, 2]. В работе [3] получены решения для изгиба упругопластических пластин в рамках эйлеровой модели конечных деформаций, основанной на логарифмической скорости. В [4] представлен обзор решений для жесткопластических и упругопластических материалов при использовании лагранжевого подхода.

1. Модельные соотношения

Для описания процесса деформирования будем использовать модель больших деформаций [5]. В эйлеровой системе координат обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями переноса:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj},$$

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj},$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}),$$

где u_i и v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, d_{ij} , e_{ij} , p_{ij} — компоненты тензоров полных, обратимых и пластических деформаций соответственно, r_{ij} — тензор вращений, ε_{ij} и γ_{ij} — компоненты скоростей полных и пластических деформаций.

Считаем, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и связаны зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}),$$

$$W = (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \chi J_1^3, \quad J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ik}s_{kj}, \quad s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}.$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши, p_1 — добавочное гидростатическое давление, $W = W(e_{ij})$ — упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии), μ — модуль сдвига исследуемого материала, b , χ — упругие модули более высокого порядка.

Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0.$$

В качестве условия пластичности используется условие

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k,$$

где σ_i , ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, k — предел текучести.

2. Постановка задачи, основные кинематические соотношения.

Пусть недеформируемая прямоугольная пластина занимает область $-h/2 \leq x_1 \leq h/2$, $-l \leq x_2 \leq l$, $-b \leq x_3 \leq b$ (рис. 1). Считаем, что под действием приложенного изгибающего момента M пластина деформируется так, что плоскости $x_1 = \text{const}$, переходят в сектора цилиндрических поверхностей $r = \text{const}$, а плоскости $x_2 = \text{const}$ в плоскости $\theta = \text{const}$.

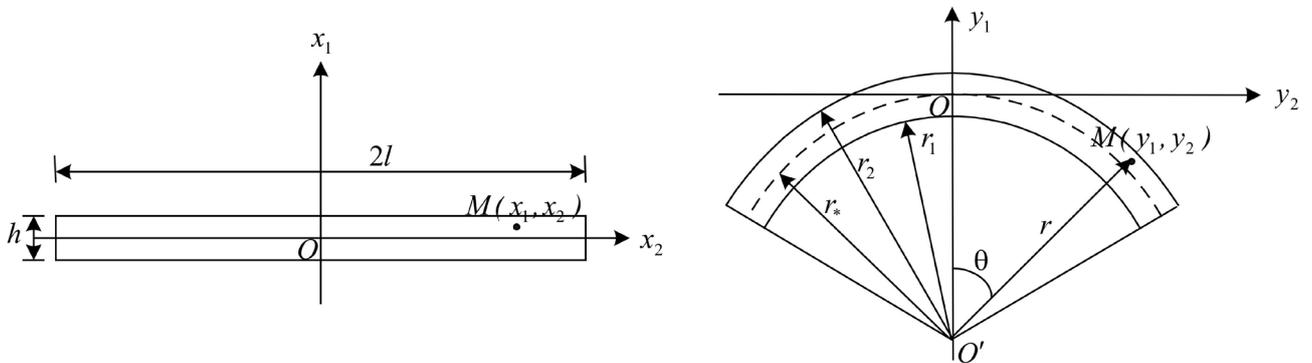


Рис. 1. Недеформированное и деформированное состояние прямоугольной пластины при изгибе

Начальные (x_1, x_2, x_3) и текущие (y_1, y_2, y_3) координаты связаны формулами:

$$y_1 = r(x_1) \cos \theta(x_2) - R^*, \quad y_2 = r(x_1) \sin \theta(x_2), \quad y_3 = x_3.$$

Используя условие несжимаемости найдем

$$r = \sqrt{R^2 + 2x_1 r_*}, \quad \theta = \frac{x_2}{r_*}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{r_*}{r}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{r_*}.$$

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ базисные вектора исходной декартовой системы координат, а $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ — базисные вектора текущей цилиндрической системы координат, тогда для тензора градиента деформаций \mathbf{F} и тензора деформаций Альманси \mathbf{d} получим

$$\mathbf{F} = r' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_1 + r \theta' \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{r_*} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^2 \right) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi.$$

Тензор градиента скоростей, тензор скоростей деформаций и тензор вращения определяются следующими равенствами

$$\mathbf{L} = \frac{\dot{r}'}{r'} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \dot{\theta}' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta}' \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r - \frac{\dot{r}'}{r'} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\dot{r}'}{r'} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \frac{\dot{r}'}{r'} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi, \\ \boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta}' \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r.$$

3. Упругое деформирование

До достижения изгибающим моментом M значения M_0 вся пластина деформируется обратимо. Отличные от нуля компоненты тензора напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + 2\mu d_{rr} - 2(k + 2b + 2a)d_{rr}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -p + a - \mu - (k + 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + 2\mu d_{\varphi\varphi} - 2(k + 2b + 2a)d_{\varphi\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} = -p + a - \mu + (2b - 3\chi)(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) - (k + 3\chi)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu(d_{rr} - d_{\varphi\varphi}) - 2(k + 2b + 2a)(d_{rr}^2 - d_{\varphi\varphi}^2).$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

и считая, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений ($\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$) найдем компоненты напряжений и изгибающий момент

$$\sigma_{rr} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \frac{r^4 - r_1^4}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^4} \right) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{2} \left(2 \frac{r^2}{r_*^2} - 2 \frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right), \quad r_*^2 = r_2 r_1, \\ M = \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r_*^2} + r_*^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{k + 2b + 2a}{4} \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{2r_*^2} - 2r_*^2 \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_*^4}{2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \frac{r_2^6 - r_1^6}{6r_*^4} \right).$$

Задавая изгибающий момент и используя соотношения $r_*^2 = r_2 r_1$, $r_2^2 - r_1^2 = 2hr_*$ можно получить уравнение для определения положения нейтральной линии r_* . Далее находятся внутренняя r_1 и внешняя r_2 цилиндрические поверхности, деформации и напряжения.

Условие пластичности в рассматриваемом случае записывается в виде $|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = 2k$. Согласно выведенным соотношениям, напряженное состояние достигнет предела текучести одновременно на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ цилиндрической поверхности.

4. Пластическое течение

После того как изгибающий момент M достигнет значения M_0 , в пластине будут упругая область $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ и две пластические области $r_2^p \leq r \leq r_2$ и $r_1 \leq r \leq r_1^p$, развивающиеся от внешней и внутренней границы соответственно. В областях пластического течения найдем

$$r_1 \leq r \leq r_1^p : \\ \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = -2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r_1}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r_1}{r} - 1 \right);$$

$$r_2^p \leq r \leq r:$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k, \quad \sigma_{rr} = 2k \ln \frac{r}{r_2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(\ln \frac{r}{r_2} - 1 \right).$$

В области обратимого деформирования $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\frac{k+2b+2a}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) - \frac{r^4 - r_1^{p4}}{4r_*^4} - \frac{r_*^4}{4} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_1^{p4}} \right) \right) + \\ & + \frac{\mu}{2} \left(\frac{r^2 - r_1^{p2}}{r_*^2} + r_*^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^{p2}} \right) \right) + 2k \ln \frac{r_1}{r_1^{p2}}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = & \sigma_{rr} + \mu \left(\frac{r^2}{r_*^2} - \frac{r_*^2}{r^2} \right) - \frac{k+2b+2a}{2} \left(2 \frac{r^2}{r_*^2} - 2 \frac{r_*^2}{r^2} - \frac{r^4}{r_*^4} + \frac{r_*^4}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Используя предыдущие соотношения можно получить систему алгебраических уравнений для определения положения нейтральной линии r_* , внутренней r_1 , внешней r_2 поверхностей и упругопластических границ r_1^p и r_2^p . Далее находим компоненты тензора напряжений и тензора деформаций Альманси. В упругой области $r_1^p \leq r \leq r_2^p$ для компонент обратимых деформаций справедливы формулы

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - \frac{r}{r_*}, \quad e_{\varphi\varphi} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{\varphi\varphi}} = 1 - \frac{r_*}{r}.$$

В областях пластического течения обратимые деформации не изменяются и равны в каждой точке значению в тот момент времени, когда до нее дошла упругопластическая граница. Компоненты пластических деформаций через полные и обратимые деформации находятся по формулам

$$p_{rr} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{rr}}{2(e_{rr} - 1)^2}, \quad p_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2d_{\varphi\varphi}}{2(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}.$$

Заключение

В рамках модели больших упругопластических деформаций получено решение о цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины. Найдены условия зарождения и продвижения упругопластических границ. Рассчитаны поля напряжений и полных, обратимых и необратимых деформаций. Представленное решение может в дальнейшем использоваться для задачи разгрузки пластины при постепенном уменьшении изгибающего момента.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFWF-2021-0005).

Литература

1. Kassianidid F. On large bending deformations of transversely isotropic rectangular elastic blocks / F. Kassianidid, R. Ogden // Note di Matematica. – 2007. – Vol. 27, No 2. – P. 131–154.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К. Ф. Черных. – Л. : Машиностроение, 1986. – 336 с.

3. *Bruhns O. T.* Bending of an elastoplastic strip with isotropic and kinematic hardening / O. T. Bruhns, N. K. Gupta, A. T. M. Meyers, H. Xiao // *Archive of Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 72. – P. 759–778.
4. *Alexandrov S.* Plastic Bending at Large Strain: A Review / S. Alexandrov, E. Lyamina, Y.-M. Hwang // *Processes*. – 2021. – Vol. 9, Iss. 3. – Art. no. 406.
5. *Буренин А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // *Доклады Академии наук*. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ J-ИНТЕГРАЛА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОТРЫВЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА

В. Э. Богачева

Тулский государственный университет

Аннотация. Исследуется упругопластическое деформирование композитной пластины, соответствующее нагружению нормальным отрывом, в состоянии плоской деформации. Рассматриваемый образец состоит из двух упругих консолей, связанных упругопластическим адгезионным слоем. Используется аналитическое решение, основанное на концепции «слоя взаимодействия», теории пластин Миндлина — Рейсснера и критерия Треска — Сен-Венана. Найдена формула для определения значений прочностной характеристики в виде J-интеграла. Показано, что у двух адгезивов с различными механическими свойствами погрешность аналитических и экспериментальных значений J-интеграла не превышает 5 %.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругопластическое деформирование, J-интеграл.

Введение

Использование адгезионных соединений находит широкое применение в различных отраслях, например, машиностроении, авиационной и ракетной техниках. Поэтому анализ их прочностных свойств является достаточно актуальной задачей.

При экспериментальных исследованиях трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют не только в виде математического разреза с жестким сцеплением сопрягаемых тел, но и в виде слоя с характерной толщиной [1–5].

В данной работе рассматривается образец, экспериментально изученный в статье [6], с адгезивами, которыми выступают смолы Araldite 2015 и Sikaforce 7752. На конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой в 2024 году [7], показано общее аналитическое решение упругопластической постановки задачи и построены графики полученных результатов. В данной работе продолжено изучение этой задачи – определена прочностная характеристика в виде J-интеграла.

1. Постановка и решение задачи

Рассматривается образец длиной $\ell + a$, где $a = 0.055$ м, $\ell = 0.2$ м, $b = 0.025$ м, b — толщина образца (рис. 1). Консоли 1 и 2 имеют одинаковые толщины $h = 0.0127$ м, модуль упругости $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. По длине ℓ тела связаны адгезионным слоем 3, толщина которого $\delta_0 = 10^{-3}$ м. Механические и прочностные характеристики, найденные экспериментально [6], для адгезивов приведены в табл. 1.

Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах консолей действует нагрузка, обеспечивающая нормальный отрыв, интенсивностью P . На остальную поверхность образца не действует внешняя нагрузка. Композит рассматриваем в состоянии плоской деформации. Поведение консолей установлено в рамках линейной теории упругости, а материал слоя является идеально упругопластическим.

В тезисе доклада для конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой в 2024 году [7] описана данная постановка задачи. В ней

Механические и прочностные характеристики адгезионных слоев

	E_3 , Па	ν_3	τ_0 , МПа	P_{cr} , Н	J_C , Н/м
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33	14.6	1500	430
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3	5.2	3100	2360

где E_3 , ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; τ_0 — предел текучести; P_{cr} — внешняя нагрузка при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м [6], J_C — значение J-интеграла.

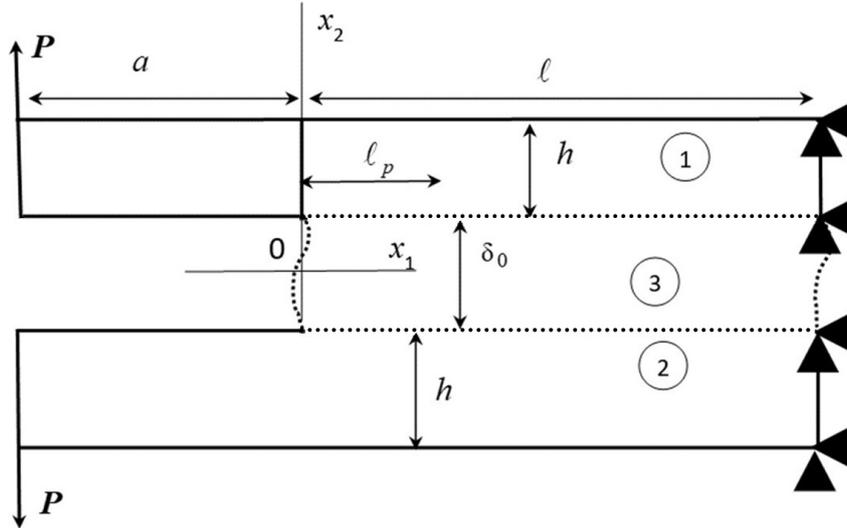


Рис. 1. Схема нагружения образца

[7] для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применяется концепция «слоя взаимодействия» с учетом симметрии образца относительно горизонтальной оси. Область упругого деформирования определяется законом Гука. На участке пластического деформирования слоя 3 предполагается выполнение критерия Треска — Сен-Венана [8] при условии полной пластичности. Также учитывается теория пластин Миндлина — Рейсснера [9, 10]. При принятых механических и геометрических характеристиках образца найдены длины пластического участка для адгезива Araldite 2015 $\ell_p = 0.00294321$ м и для Sikaforce 7752 — $\ell_p = 0.01357304$ м.

Поле перемещений в теле 1 определяется следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (1)$$

где u_1^+ , u_2^+ — компоненты векторов перемещений верхней границы слоя, φ — угол поворота материальных нормалей к плоскости $x_2 = \delta_0/2$.

Согласно работе [7] общее решение на участке $(0; \ell_p]$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u_1^+ = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
 & - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{Dh} \tilde{C}_1 x_1 + \frac{2\tau_0 \delta_0}{3Dh} x_1 + \tilde{C}_6, \\
 u_2^+ = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ - R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} -
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$-\tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \frac{\delta_0}{2Dh} \tilde{C}_1 - \frac{2\tau_0 \delta_0 S}{3Dh}, \quad (3)$$

$$\varphi = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $D = \frac{E}{(1-\nu^2)}$; $L = k \frac{E}{2(1+\nu)}$; $k = \frac{5}{6}$; $\Delta = 4D^2 h^4 (1 - \delta_0 T)$; $T = 12L(2LS + Dh)/(D^2 h^2)$;

$$K = \frac{E_3}{3(1-2\nu_3)}; S = Dh/K + 0.5\delta_0; R_1 = \sqrt{0.5(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)}; R_2 = \sqrt{0.5(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)};$$

$$\alpha = (Dh - 6L\delta_0)/(Lh\delta_0(Dh/K + 2\delta_0)); \beta = D\sqrt{\delta_0 T - 1}/(L\delta_0(Dh/K + 2\delta_0));$$

$$R_3 = 2LS(R_1^2 - R_2^2 - 2D/(LS\delta_0))/V; R_4 = 4LSR_1 R_2/V; V = 2LS + Dh;$$

$$R_5 = Dh^2(R_2 R_4 - R_1 R_3)/(2SK) + R_1/S; R_6 = -Dh^2(R_1 R_4 + R_2 R_3)/(2SK) + R_2/S; R_7 = R_1/(R_1^2 + R_2^2);$$

$$R_8 = R_2/(R_1^2 + R_2^2); R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8; R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8.$$

А общее решение на участке $(\ell_p; \ell]$:

$$u_1^+ = \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ + F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ + F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2(C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2} \right] \tilde{C}_7 x_1 + \tilde{C}_{12}, \quad (5)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_7, \quad (6)$$

$$\varphi = -\tilde{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ + F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$;

$$d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4; \quad m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}; \quad m_2 = \frac{1}{Lh} \left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right);$$

$$m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}; \quad m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}; \quad S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1. \quad F_1 = \sqrt{0.5(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \xi)};$$

$$F_2 = \sqrt{0.5(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} - \xi)}; \quad \xi = 0.5(m_2 + m_1 m_3 + m_4); \quad \zeta = 0.5\sqrt{-d}; \quad F_3 = (m_2 - F_1^2 + F_2^2)/m_1;$$

$$F_4 = (2F_1 F_2)/m_1; \quad F_5 = 0.5(Dh^2(F_1 F_3 + F_2 F_4) + \delta_0 D_2 F_1)/S_2;$$

$$F_6 = 0.5(Dh^2(F_2 F_3 - F_1 F_4) + \delta_0 D_2 F_2)/S_2; \quad F_7 = F_1/(F_1^2 + F_2^2); \quad F_8 = F_2/(F_1^2 + F_2^2);$$

$$F_9 = F_5 F_7 + F_6 F_8; \quad F_{10} = F_6 F_7 - F_5 F_8.$$

Чтобы найти 12 констант интегрирования, необходимо удовлетворить следующим условиям:

$$u_n^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=0} = -Pa/b,$$

$$Q_{12}|_{x_1=0} = -P/b, \quad (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0,$$

$$u_n^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_n^+|_{x_1=\ell_p+0}, \quad \varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0}, \quad M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p+0},$$

$$Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0}, \quad Q_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0},$$

где $Q_{11}(x_1) = Dh \left(u_1^{+'} - \frac{h}{2} \varphi' \right)$, $Q_{12}(x_1) = Lh \left(u_2^{+'} - \varphi \right)$, $M_{11} = Dh^2 \left(\frac{1}{2} u_1^{+'} - \frac{h}{3} \varphi' \right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

2. Определение J-интеграла

Согласно работе [11] на рис. 2 показан элемент слоя взаимодействия, включающий в себя все области диссипации. Данный элемент находится в равновесии под воздействием распределенной внешней нагрузки \mathbf{q} , где \mathbf{q}^+ — нагрузка по верхней границе слоя; \mathbf{q}^- — нагрузка по нижней границе слоя; $\bar{\mathbf{q}}^r$ — нагрузка по правому торцу слоя; $\bar{\mathbf{q}}^l$ — нагрузка по левому торцу слоя. Замкнутый контур охватывает область диссипации в слое.

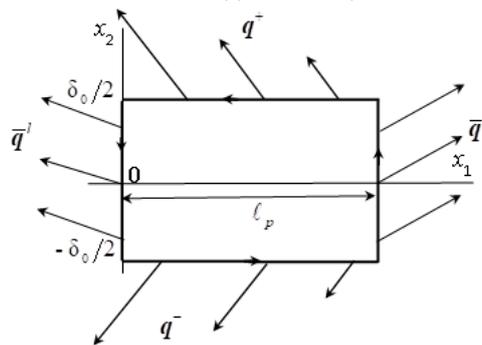


Рис. 2. Равновесие упругопластического элемента слоя

Следуя работе [12], приходим к следующему определению J-интеграла:

$$J = \delta_0 \psi|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (9)$$

где ψ — удельная свободная энергия; $\bar{\mathbf{u}} = 0.5(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ — вектор средних перемещений; $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$; $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; σ_{12}^\pm , σ_{22}^\pm — граничные напряжения слоя; $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\sigma}_{22}$ — средние напряжения на торцах слоя.

Для случая нормального отрыва имеем: $u_1^+ = u_1^+$; $u_2^+ = -u_2^-$; $\bar{\sigma}_{12} = 0$; $\sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+ = 0.5\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}$;
 $\sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \bar{\sigma}_{22}$.

Таким образом, получим выражение для J-интеграла в следующем виде:

$$J = \delta_0 \left[\frac{\tau_0}{3} (\bar{\varepsilon}_{11} - 2\bar{\varepsilon}_{22}) \Big|_{x_1=\ell_p} + \frac{K}{2} (\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2) \Big|_{x_1=0} + \frac{4\tau_0}{3} \bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=0} \right], \quad (10)$$

где $\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{du_1^+}{dx_1}$, $\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{2u_2^+}{\delta_0}$ — средние деформации в адгезионном слое.

Для умеренно пластичного адгезива Araldite 2015 по формуле (10) получено значение J-интеграла $J = 439.04$ Н/м, а для пластичного полиуретана Sikaforce 7752 — $J = 2233.64$ Н/м. Таким образом, погрешность аналитических результатов (10) относительно экспериментальных (табл. 1) составляет менее 5 %.

Заключение

Представлено общее аналитическое решение. Показан подход для определения прочностной характеристики в виде J-интеграла. С использованием полученной формулы вычислены его значения для адгезивов Araldite 2015 и Sikaforce 7752. Показано, что аналитические значения J-интеграла отличаются от экспериментальных не более чем на 5 %.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. Prandtl L. A thought model for the fracture of brittle solids / L. Prandtl, W. G. Knauss // International Journal of Fracture. – 2011. – Vol. 171, №. 2. – P. 105–109.
2. Ентов В. М. К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 87–99.
3. Салганик Р. Л. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубококозалегающем горизонтальном пласте / Р. Л. Салганик, А. А. Мищенко, А. А. Федотов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.
4. Макклинток Ф. Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклинток // Разрушение. – Москва : Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.
5. Глаголев В. В. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 22–34.
6. Lopes R. M. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G. da Silva, T.M.S. Faneco // Journal of Adhesion and Adhesives. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111.
7. Богачева В. Э. Нормальный отрыв упругопластического тонкого адгезионного слоя композита / В. Э. Богачева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2–4 декабря 2024 г. – 2025. – С. 1039–1045.
8. Ишлинский А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.

9. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.

10. *Reissner E.* On Bending of Elastic Plates / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol. 5(1). – P. 55–68.

11. *Глаголев В. В.* Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J-интеграла в состоянии плоской деформации / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 115–131.

12. *Berto F.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite / F. Berto, V. V. Glagolev, A. A. Markin // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, № 2. – P. 277–284.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА НАНОПЛАСТИН

Фам Ван Винь

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. В настоящей работе исследуется зависимое от размеров статическое поведение изгиба изотропных нанопластин, опирающихся на упругие основания, в рамках обобщённой модифицированной теории нелокального градиента деформации. Управляющие уравнения сформулированы на основе принципа Гамильтона с учётом как нелокальных, так и градиентных эффектов. Для нанопластин с шарнирным опиранием получены аналитические решения в замкнутой форме, позволяющие провести параметрические исследования. Результаты показывают совокупное влияние жёсткости основания, параметров нелокальности и градиента на прогиб наноструктур. Предложенная модель обеспечивает согласованное континуальное описание, позволяющее точно прогнозировать статический изгиб нанопластин, опирающихся на упругие основания.

Ключевые слова: нелокальная теория упругости, модифицированная теория градиента деформации, тензор напряжений высшего порядка, теория деформации сдвига высокого порядка, нанопластины, анализ изгиба, упругие основания.

Введение

На наноуровне механическое поведение конструкций существенно отклоняется от предсказаний классической теории упругости из-за размерных эффектов, проявляющихся при сближении характерных размеров с внутренними масштабами материала. Классические континуальные модели, не учитывающие эти эффекты, оказываются недостаточно точными для анализа наноструктур, таких как нанобалки, нанопластины и нанооболочки (Dell'Isola и др. [1]; Lurie и др. [2, 3]; Karami и др. [4]; Eremeyev и др. [5–7]).

Для устранения этих ограничений разработаны континуальные теории более высокого порядка, среди которых наибольшее распространение получили нелокальная теория упругости Эрингена [8, 9] и модифицированная теория градиента деформаций Лама и соавт. [10]. Первая учитывает далекодействующие межатомные взаимодействия, но не описывает градиентное упрочнение; вторая, напротив, учитывает микроструктурные масштабы, но не включает нелокальные взаимодействия напряжений.

Для построения более общей модели автор объединил нелокальные и градиентные эффекты (Vinh [11]), сформировав модифицированную теорию нелокального градиента деформации. В ней нелокальность вводится как в классические, так и в высшие тензоры напряжений, что позволяет учитывать механизмы «размягчения» и «упрочнения» материала. Эта теория корректно описывает размерно-зависимые процессы изгиба и колебаний микро- и наноструктур.

В практических условиях нанопластины часто опираются на податливые подложки, которые моделируются в виде упругих оснований типов Винклера и Пастернака (Abdelillah и др. [12]). Такие основания описывают взаимодействие пластины с окружающей средой, влияя на прогибы и распределение напряжений.

Настоящее исследование направлено на анализ статического изгиба изотропных нанопластин на упругих основаниях в рамках модифицированной теории нелокального градиента деформации. Управляющие уравнения выведены по принципу Гамильтона и решены аналитически для случая шарнирного опирания. Предложенная модель обеспечивает единый и согласованный теоретический базис для задач изгиба нанопластин с совместным проявлением нелокальных и градиентных эффектов.

1. Теоретические положения

1.1. Модифицированная теория нелокального градиента деформации

Настоящий раздел представляет формулировку модифицированной теории нелокального градиента деформации, объединяющей основные положения нелокальной теории упругости и теории градиента деформаций. Предложенная Ламом и соавт. [10] теория расширяет классическую упругость ε_{ij} за счёт введения дополнительных мер деформации — градиент дилатации γ_i , градиент девиаторного растяжения η_{ijk} , и симметричный тензор кривизны χ_{ij} . Полная плотность упругой энергии включает классическую часть и добавочные члены, обусловленные деформациями более высокого порядка:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk} \eta_{ijk} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (1)$$

где σ_{ij} , m_{ij} , p_i , и τ_{ijk} обозначают, соответственно, тензор напряжений Коши, парные (вихревые) напряжения высшего порядка, связанные с градиентами γ_i и η_{ijk} . Связи между ε_{ij} , χ_{ij} , γ_i , η_{ijk} и компонентами вектора перемещений (u_1, u_2, u_3) имеют вид (по Lam и др. [10]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \chi_{ij} = \frac{1}{4} (e_{imn} u_{n,mj} + e_{jmn} u_{n,mi}); \gamma_i = \varepsilon_{mm,i}; \\ \eta_{ijk} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15} \left[\delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где e_{ijk} и δ_{ij} — символы перестановки и Кронекера соответственно.

Тензоры напряжений σ_{ij} , m_{ij} , p_i , и τ_{ijk} могут быть представлены следующими линейными соотношениями упругости (Lam и др. [10]):

$$\sigma_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij}; p_i = 2\eta l_0^2 \gamma_i; \tau_{ijk} = 2\eta l_1^2 \eta_{ijk}; m_{ij} = 2\eta l_2^2 \chi_{ij}, \quad (3)$$

где l_0, l_1, l_2 — характерные масштабные параметры материала, связанные соответственно с величинами γ_i , η_{ijk} , χ_{ij} ; и η, λ — коэффициенты Ламе, задаваемые выражениями:

$$\eta = \frac{E}{2[1+\nu]}; \lambda = \frac{\nu E}{[1+\nu][1-2\nu]}. \quad (4)$$

В рамках нелокальной теории упругости напряжение в точке определяется не только локальной деформацией, но и деформациями окружающей области. Согласно формулировке Эрингена [8, 9], нелокальный тензор напряжений выражается через свёртку классического поля напряжений с ядром затухания, что при определённых допущениях приводит к дифференциальной форме:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij}, \quad (5)$$

где μ — параметр нелокальности.

В настоящей работе эффект нелокальности последовательно распространяется и на напряжения более высокого порядка — m_{ij} , p_i , и τ_{ijk} . Соответственно, нелокальные конститутивные соотношения имеют вид (Vinh [11]):

$$\begin{aligned} (1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; (1 - \mu \nabla^2) p_i = 2\eta l_0^2 \gamma_i; \\ (1 - \mu \nabla^2) \tau_{ijk} &= 2\eta l_1^2 \eta_{ijk}; (1 - \mu \nabla^2) m_{ij} = 2\eta l_2^2 \chi_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

1.2. Уравнения равновесия

В настоящем исследовании рассматривается нанопластина размерами $a \times b$ и толщиной h . Геометрические параметры нанопластины и система координат показаны на рис. 1.

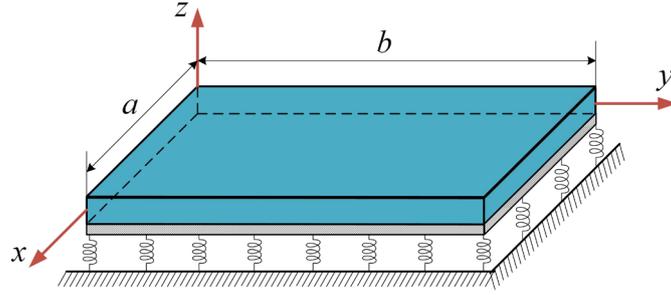


Рис. 1. Нанопластины на упругих основаниях

Для описания поля перемещений нанопластины используется теория деформации сдвига высокого порядка. Формулировка данной теории имеет вид:

$$\begin{cases} U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \\ W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

где u, v — продольные перемещения точек срединной поверхности пластины; w_b, w_s — составляющие прогиба по изгибу и сдвигу соответственно для точек срединной поверхности. Зависимость функции $f(z)$ задана выражением $f(z) = \frac{z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2}$.

Классические деформации, тензоры кривизны и тензоры градиента более высокого порядка для нанопластин можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\varepsilon}^1 + f\boldsymbol{\varepsilon}^2; \boldsymbol{\gamma} = g\boldsymbol{\gamma}^0; \bar{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\boldsymbol{\eta}}^0 + z\bar{\boldsymbol{\eta}}^1 + f(z)\bar{\boldsymbol{\eta}}^2 + f''(z)\bar{\boldsymbol{\eta}}^3; \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}^0 + f'(z)\tilde{\boldsymbol{\eta}}^1; \\ \boldsymbol{\gamma}_p &= \boldsymbol{\gamma}_p^0 + z\boldsymbol{\gamma}_p^1 + f(z)\boldsymbol{\gamma}_p^2 + f'(z)\boldsymbol{\gamma}_p^3; \boldsymbol{\chi}_b = \boldsymbol{\chi}_b^0 + (1-f')\boldsymbol{\chi}_b^1; \boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\chi}_s^0 + f''\boldsymbol{\chi}_s^1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $g = \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{h^2}$; $f'' = -\frac{10z}{h^2}$. Согласно модифицированной теории нелокального градиента деформации, конститутивные соотношения (6) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; (1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \\ (1 - \mu \nabla^2) \{p_x, p_y, p_z\} &= 2\eta l_0^2 \{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\}; \\ (1 - \mu \nabla^2) \{\tau_{xxx}, \tau_{yyy}, \tau_{yyx}, \tau_{zxx}, \tau_{xxy}, \tau_{zzy}, \tau_{zzz}, \tau_{xxz}, \tau_{yyz}, \tau_{xyz}\} &= \\ &= 2\eta l_1^2 \{\eta_{xxx}, \eta_{yyy}, \eta_{yyx}, \eta_{zxx}, \eta_{xxy}, \eta_{zzy}, \eta_{zzz}, \eta_{xxz}, \eta_{yyz}, \eta_{xyz}\}; \\ (1 - \mu \nabla^2) \{m_{xx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{xy}, m_{xz}, m_{yz}\} &= 2\eta l_2^2 \{\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{zz}, \chi_{xy}, \chi_{xz}, \chi_{yz}\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}; C_{44} = C_{55} = C_{66} = \eta = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (10)$$

Влияние нелокальности вводится через конститутивные соотношения, при этом принцип Гамильтона остаётся независимым от указанных допущений. Следовательно, его можно использовать как общий вариационный аппарат для вывода уравнений движения нанопластин. Принцип формулируется следующим образом:

$$\int_0^t (\delta\Pi^\sigma + \delta\Pi^p + \delta\Pi^\tau + \delta\Pi^m + \delta\Pi_f + \delta W_F) dt = 0, \quad (11)$$

где где $\delta\Pi^\sigma$, $\delta\Pi^p$, $\delta\Pi^\tau$ и $\delta\Pi^m$ — вариации энергии деформации, соответствующие напряжениям σ_{ij} , p_i , τ_{ijk} и m_{ij} , соответственно; $\delta\Pi_f$ — вариации плотностей потенциальной энергии деформации и энергии, накопленной в упругом основании; δW_F — вариация виртуальной работы внешних сил.

Энергия деформации, соответствующая различным тензорам напряжений в рамках модифицированной нелокальной теории градиента деформаций, выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Pi^\sigma &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV; \\ \Pi^m &= \frac{1}{2} \int_V (m_{xx} \chi_{xx} + m_{yy} \chi_{yy} + 2m_{xy} \chi_{xy} + 2m_{xz} \chi_{xz} + 2m_{yz} \chi_{yz}) dV; \\ \Pi^p &= \int_V (p_x \gamma_x + p_y \gamma_y + p_z \gamma_z) dV; \\ \Pi^\tau &= \frac{1}{2} \int_V \left(\tau_{xxx} \eta_{xxx} + \tau_{yyy} \eta_{yyy} + 3\tau_{yyx} \eta_{yyx} + 3\tau_{zzx} \eta_{zzx} + 3\tau_{xxy} \eta_{xxy} + \right. \\ &\quad \left. + 3\tau_{zzy} \eta_{zzy} + \tau_{zzz} \eta_{zzz} + 3\tau_{xxz} \eta_{xxz} + 3\tau_{yyz} \eta_{yyz} + 6\tau_{xyz} \eta_{xyz} \right) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение для потенциальной энергии, аккумулированной в упругом основании, имеет следующий вид:

$$\Pi_f = \frac{1}{2} \int_S k_w (w_b + w_s)^2 dS + \frac{1}{2} \int_S k_s \left[\left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y} \right)^2 \right] dS. \quad (13)$$

Выражение для работы внешней нагрузки имеет следующий вид:

$$W_F = - \int_S q(x, y) (w_b + w_s) dS. \quad (14)$$

Подставляя выражения (12)–(17) в уравнение (11) и применяя интегрирование по частям, получаем уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta u : & -\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xz}^m}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yz}^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}_x^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}_y^p}{\partial x \partial y} + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxx}^\tau}{\partial x^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxx}^\tau}{\partial y^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{-1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial x^2} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial y^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzx}^\tau}{\partial x^2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzx}^\tau}{\partial y^2} + \frac{8}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxy}^\tau}{\partial x \partial y} - \frac{2}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzy}^\tau}{\partial x \partial y} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \delta v : & -\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xz}^m}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yz}^m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{N}_x^p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{N}_y^p}{\partial y^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxx}^\tau}{\partial x \partial y} + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial y^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial x^2} + \\ & + \frac{8}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{yyx}^\tau}{\partial x \partial y} - \frac{2}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzx}^\tau}{\partial x \partial y} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxy}^\tau}{\partial y^2} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xxy}^\tau}{\partial x^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzy}^\tau}{\partial y^2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{N}_{zzy}^\tau}{\partial x^2} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & -\frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{N}_{xx}^m}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{N}_{yy}^m}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xy}^m}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{N}_{xy}^m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{N}_z^p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{N}_z^p}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial^3 \bar{M}_x^p}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \bar{M}_x^p}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{M}_y^p}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \bar{M}_y^p}{\partial y^3} + \frac{2}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{xxx}^\tau}{\partial x^3} - \frac{3}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{xxx}^\tau}{\partial x \partial y^2} + \frac{2}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{yyy}^\tau}{\partial y^3} - \frac{3}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{yyy}^\tau}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{yyx}^\tau}{\partial x^3} + \\ & + \frac{4}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{yyx}^\tau}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{zzx}^\tau}{\partial x^3} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{zzx}^\tau}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{xxy}^\tau}{\partial y^3} + \frac{4}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{xxy}^\tau}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{zzy}^\tau}{\partial y^3} - \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{M}_{zzy}^\tau}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{zzz}^\tau}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{zzz}^\tau}{\partial y^2} - \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xxz}^\tau}{\partial x^2} + \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xxz}^\tau}{\partial y^2} + \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yyz}^\tau}{\partial x^2} - \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yyz}^\tau}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xyz}^\tau}{\partial x \partial y} = (1 - \mu \nabla^2) (R_f - q); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\delta w_s : & \frac{\partial^2 \bar{P}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{P}_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{M}_{xx}^m}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{M}_{yy}^m}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}^m}{\partial y^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}^m}{\partial x^2} + \\
& + \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{S}_{xz}^m}{\partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{S}_{yz}^m}{\partial x} - \frac{\partial^3 \bar{P}_x^p}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \bar{P}_y^p}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \bar{P}_y^p}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \bar{P}_y^p}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \bar{R}_z^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{R}_z^p}{\partial y^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{xxx}^r}{\partial x^3} + \frac{3}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{xxx}^r}{\partial x \partial y^2} + \\
& + \frac{-2}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{yyy}^r}{\partial y^3} + \frac{3}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{yyy}^r}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{yyx}^r}{\partial x^3} - \frac{4}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{yyx}^r}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{zzx}^r}{\partial x^3} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{zzx}^r}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{xxy}^r}{\partial y^3} - \frac{4}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{xxy}^r}{\partial x^2 \partial y} + \\
& + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{zzy}^r}{\partial y^3} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 \bar{P}_{zzy}^r}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{5} \frac{\partial \bar{R}_{xxx}^r}{\partial x} + \frac{1}{5} \frac{\partial \bar{R}_{yyy}^r}{\partial y} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{R}_{yyx}^r}{\partial x} - \frac{4}{15} \frac{\partial \bar{R}_{zzx}^r}{\partial x} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{R}_{xxy}^r}{\partial y} - \frac{4}{15} \frac{\partial \bar{R}_{zzy}^r}{\partial y} + \\
& + \frac{-1}{5} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{zzz}^r}{\partial x^2} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{zzz}^r}{\partial y^2} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xxz}^r}{\partial x^2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xxz}^r}{\partial y^2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yyz}^r}{\partial x^2} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{yyz}^r}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{Q}_{xyz}^r}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \bar{S}_{zzz}^r}{\partial x^2} + \\
& + \frac{-2}{5} \frac{\partial^2 \bar{S}_{zzz}^r}{\partial y^2} + \frac{8}{15} \frac{\partial^2 \bar{S}_{xxz}^r}{\partial x^2} - \frac{2}{15} \frac{\partial^2 \bar{S}_{xxz}^r}{\partial y^2} - \frac{2}{15} \frac{\partial^2 \bar{S}_{yyz}^r}{\partial x^2} + \frac{8}{15} \frac{\partial^2 \bar{S}_{yyz}^r}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \bar{S}_{xyz}^r}{\partial x \partial y} = (1 - \mu \nu^2)(R_f - q),
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\{\bar{N}_{ijk}, \bar{M}_{ijk}, \bar{P}_{ijk}, \dots\} = (1 - \mu \nu^2)\{N_{ijk}, M_{ijk}, P_{ijk}, \dots\}$; $i, j, k = x, y, z$.

1.3. Аналитическое решение

Уравнения движения решаются методом Навье, перемещения нанопластины представляются рядами Фурье:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y; \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y; \\
w_b(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Wb_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y; \quad w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Ws_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$; $U_{mn}, V_{mn}, Wb_{mn}, Ws_{mn}$ — неизвестные коэффициенты; а m, n обозначают количество полуволн вдоль осей x и y соответственно. Распределённая нагрузка $q(x, y)$ выражается аналогичным образом: $q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$.

2. Результаты и обсуждение

Рассматривается нанопластина типа SSSS (с шарнирным опиранием по всем краям), лежащая на упругом основании и имеющая размеры $a = b = 10$ нм и толщину h . Материал нанопластины — Al_2O_3 , а его физико-механические характеристики составляют: $E = 380$ ГПа, $\rho = 3800$ кг/м³, $\nu = 0.3$. Для численного анализа используются следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
w^* &= \frac{10Eh_0^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \quad \sigma_x^* = \frac{10h_0}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad \tau_{xz}^* = \frac{10h_0}{q_0 a} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right); \\
\tau_{xy}^* &= \frac{10h_0}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, -\frac{h}{2} \right); \quad K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}; \quad K_s = \frac{k_s a^2}{D_c}; \quad D_c = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}; \quad h_0 = \frac{a}{10}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Нанопластина подвергается воздействию синусоидально распределённой нагрузки $q = q_0 \sin(x\pi/a) \sin(y\pi/b)$. Безразмерные прогибы и напряжения нанопластин типа SSSS при отношении $a/h = 10$, параметрах нелокальности μ , и масштабных параметрах материала $l_0 = l_1 = l_2 = l$ приведены в табл. 1 для $K_w = 100$, $K_s = 10$. Влияние параметров μ и l/h на прогибы показано на рис. 2, а на напряжения — на рис. 3 и 4. Как видно, увеличение параметра

нелокальности приводит к росту безразмерных прогибов w^* и напряжений, что указывает на эффект «размягчения», обусловленный нелокальными взаимодействиями. При увеличении отношения l/h прогибы и напряжения, наоборот, уменьшаются, что отражает упрочнение, связанное с градиентными эффектами. Это означает, что большие значения l/h повышают внутреннюю жёсткость нанопластины. Рис. 5 иллюстрирует влияние параметров жёсткости основания на прогибы: при росте K_w или K_s значения w^* снижаются, так как основание создаёт дополнительную восстанавливающую силу, противодействующую поперечной деформации. Сравнение различных комбинаций параметров показывает, что нанопластины с большим параметром нелокальности μ или меньшим масштабным отношением l/h демонстрируют большие прогибы при одинаковой жёсткости основания.

Таблица 1

Безразмерные прогибы и напряжения нанопластин типа SSSS при синусоидальной нагрузке

l/h	$\mu = 0$				$\mu = 4$			
	w^*	σ_x^*	τ_{xz}^*	τ_{xy}^*	w^*	σ_x^*	τ_{xz}^*	τ_{xy}^*
0.00	0.1639	10.8354	1.3208	5.8344	0.2169	14.3376	1.7477	7.7202
0.25	0.1078	7.0638	0.9836	3.8036	0.1566	10.2624	1.4290	5.5259
0.50	0.0532	3.4580	0.5421	1.8620	0.0855	5.5527	0.8705	2.9899
0.75	0.0289	1.8689	0.3080	1.0063	0.0487	3.1489	0.5189	1.6955
1.00	0.0176	1.1373	0.1917	0.6124	0.0304	1.9610	0.3305	1.0559

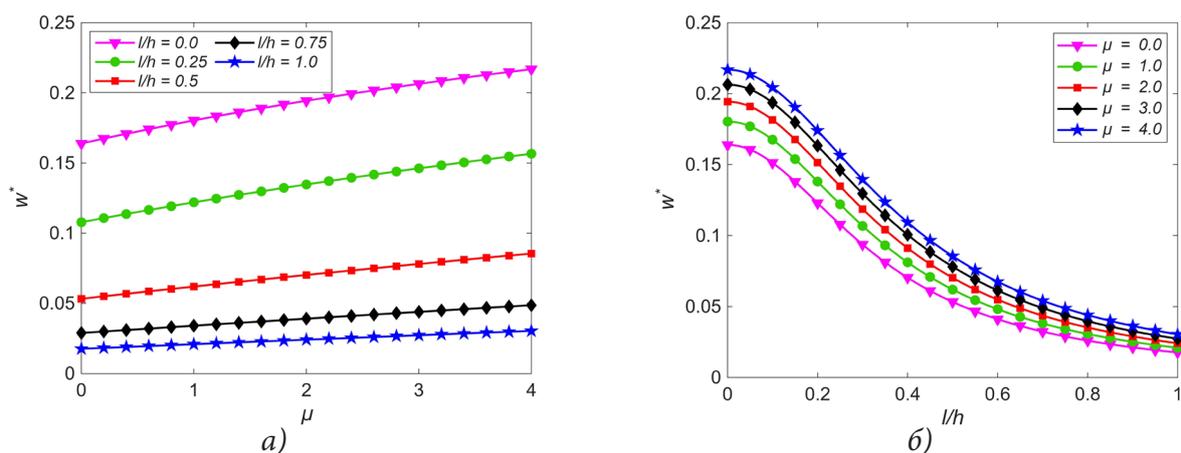


Рис. 2. Изменение безразмерного прогиба w^* в зависимости от параметра нелокальности μ и отношения масштабного параметра материала l/h : а) μ ; б) l/h

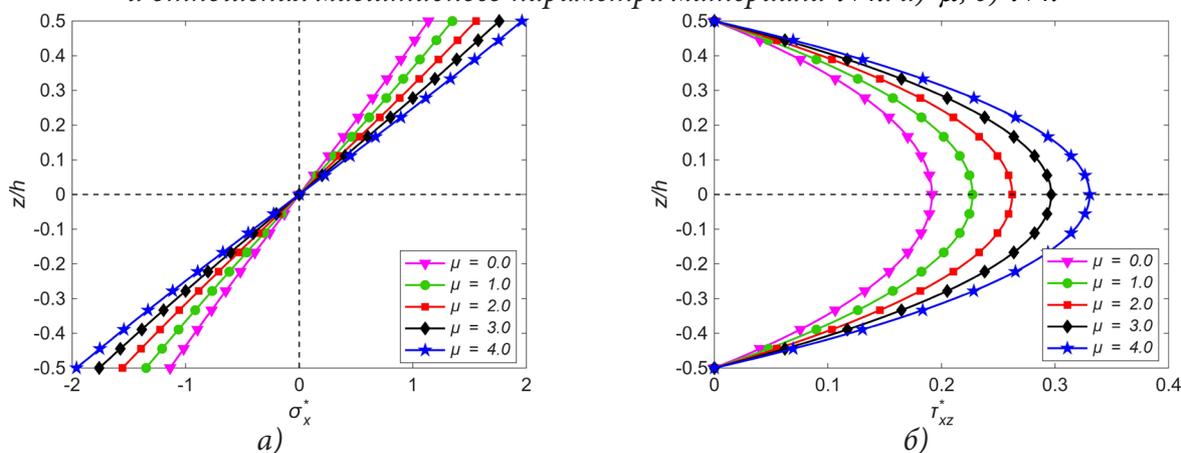


Рис. 3. Влияние различных параметров нелокальности μ на распределение напряжений по толщине: а) нормальные напряжения; б) касательные напряжения

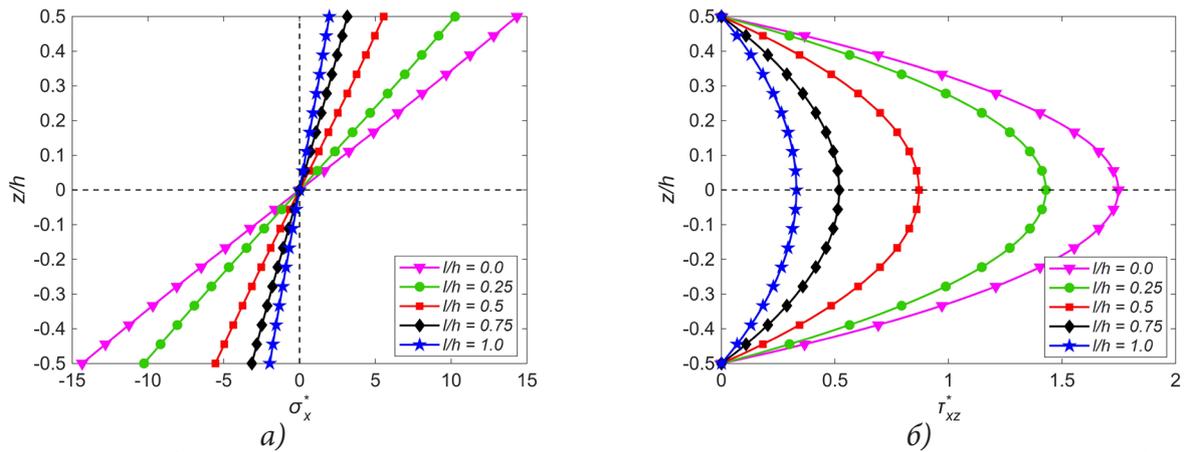


Рис. 4. Распределение напряжений по толщине при различных отношениях масштабного параметра материала l/h : а) нормальные напряжения; б) касательные напряжения

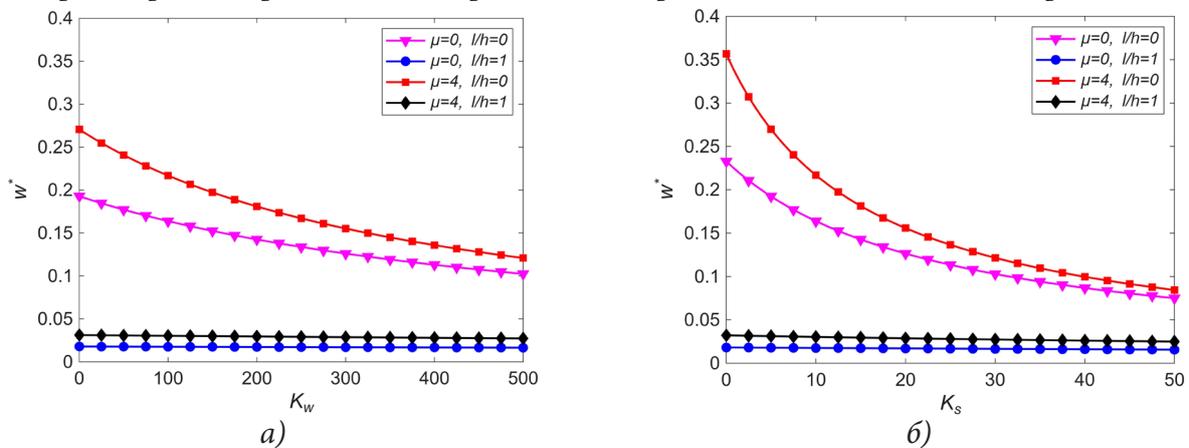


Рис. 5. Изменение прогибов нанопластины в зависимости от параметров основания: а) параметр Винклера K_w ; б) параметр Пастернака K_s

Заключение

Была разработана модифицированная теория нелокального градиента деформации для анализа статического изгиба нанопластин, опирающихся на упругое основание. Предложенная теория последовательно объединяет эффекты нелокального «размягчения» и градиентного «упрочнения» в рамках единой континуальной модели. Полученные результаты показывают, что увеличение параметра нелокальности приводит к росту прогибов, тогда как повышение отношения масштабного параметра материала снижает их. Жёсткости основания Винклера и Пастернака эффективно подавляют деформации, причём сдвиговой слой оказывает более сильное влияние. Предложенная модель представляет собой простую, но точную методику для анализа нанопластин и может быть распространена на более сложные геометрические конфигурации.

Литература

1. Dell'Isola F. Deformation of an elastic second gradient spherical body under equatorial line density of dead forces / F. Dell'Isola, V. A. Eremeyev, V. A. Korolenko, Yu. O. Solyaev // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2024. – V. 103. – St. 105153.
2. Lurie S. Gradient effects in fracture mechanics for nano-structured materials / S. Lurie, P. Belov // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – V. 130. – P. 3–11.

3. *Lurie S.* Variant of strain gradient elasticity with simplified formulation of traction boundary value problems / S. Lurie, Yu. Solyaev // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2023. – V. 103. – P. 1–14.
4. *Karami B.* On the size-dependent vibrations of doubly curved porous shear deformable FGM microshells / B. Karami, M. H. Ghayesh, S. Hussain, M. Amabili // International Journal of Mechanical Systems Dynamics. – 2024. – V. 4. – P. 387–405.
5. *Eremeyev V. A.* Nonlinear strain gradient and micromorphic one-dimensional elastic continua: Comparison through strong ellipticity conditions / V. A. Eremeyev, E. Reccia // Mechanics Research Communications. – 2022. – V. 124. – St. 103909.
6. *Eremeyev V. A.* On the ellipticity of static equations of strain gradient elasticity and infinitesimal stability / V. A. Eremeyev // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. – 2023. – V. 56. – P. 77–83.
7. *Eremeyev V. A.* On well-posedness of the first boundary-value problem within linear isotropic Toupin–Mindlin strain gradient elasticity and constraints for elastic moduli / V. A. Eremeyev // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2023. – V. 103. – St. e202200474.
8. *Eringen A. C.* On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves / A. C. Eringen // Journal of Applied Physics. – 1983. – V. 54. – P. 4703–4710.
9. *Lam D. C. C.* Experiments and theory in strain gradient elasticity / D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong [et al.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2003. – V. 51. – P. 1477–1508.
10. *Vinh P. V.* A novel modified nonlocal strain gradient theory for comprehensive analysis of functionally graded nanoplates / P. V. Vinh // Acta Mechanica. – 2025. – V. 236. – P. 173–204.
11. *Abdelillah B.* Influence of porosity variations on the flexural response of FG-CNT composite beams resting on Winkler, Pasternak and Kerr foundations / B. Abdelillah, M. Zidour, R. Zerrouki, M. Bouazza // Journal of Composite Materials. – 2025. – V. 59. – P. 3137–3153.

ВЛИЯНИЕ НА НДС ОБОЛОЧКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПОДАТЛИВОСТИ ОПОРНОГО КОНТУРА

Д. С. Глазков, В. А. Козлов

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Настоящая работа посвящена анализу влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки отрицательной гауссовой кривизны учета податливости опорного контура методом конечных элементов. Исследуемый объект представляет собой предварительно напряженную железобетонную оболочку на круглом плане с поверхностью, описываемой уравнением гиперболического параболоида. Основными несущими элементами являются напрягаемые канаты. В работе проведен сравнительный анализ абсолютно жесткого и податливого опорного контура, а также контура с податливостью, вычисленной с учетом взаимодействия с опорной конструкцией. Полученные результаты позволили сделать выводы о необходимости учета конечной жесткости опорной конструкции контура исследуемой оболочки.

Ключевые слова: метод конечных элементов, податливость, жесткость, условия закрепления, оболочка, предварительное напряжение, опорный контур, напряженно-деформированное состояние.

Введение

Современная парадигма расчета зданий и сооружений состоит в комплексном рассмотрении системы: здание-фундамент-основание, однако на этапе разработки концепции и предварительного проектирования зачастую сначала необходимо определиться с основными параметрами отдельных частей проектируемого объекта. Особенно это характерно для объектов повышенной сложности, требующих учета множества факторов [4, 5, 7], в виду чего моделирование всей системы целиком на начальном этапе представляется нецелесообразным. К таким объектам относятся предварительно напряженные оболочки.

Среди большого количества расчетных предпосылок таких объектов в настоящей статье выделим учет условий закрепления и податливости опорного контура и рассмотрим их влияние на напряженно-деформированное состояние оболочки [1–2, 6, 8].

1. Методы исследования

Объект исследования представляет собой предварительно напряженную оболочку отрицательной гауссовой кривизны на круглом плане, покоящуюся на спаренных тросах, являющихся растянутой арматурой оболочки. Поверхность оболочки является гиперболическим параболоидом. Основные конструктивные элементы объекта представлены в табл. 1.

Таблица 1

Основные конструктивные элементы [3]

Элемент	Сечение
Оболочка	60 мм
Опорный контур	Переменного сечения от 1500×800 до 4200×800
Балки омоноличивания стягивающих тросов	300×900
Балки омоноличивания рабочих тросов	300×150
Тросы	52,5 мм

Исследование проводится в программном комплексе ЛИРА-САПР. Опорный контур, балки, тросы замоделированы стержневыми конечными элементами, оболочка — пластинчатыми конечными элементами. Рассматривается стадия предварительного напряжения конструкции. Конечно-элементная модель объекта представлена на рис. 1.

1.Напряжение+СВ [1. Основная задача; C1. Основная задача; D1. Основная задача]

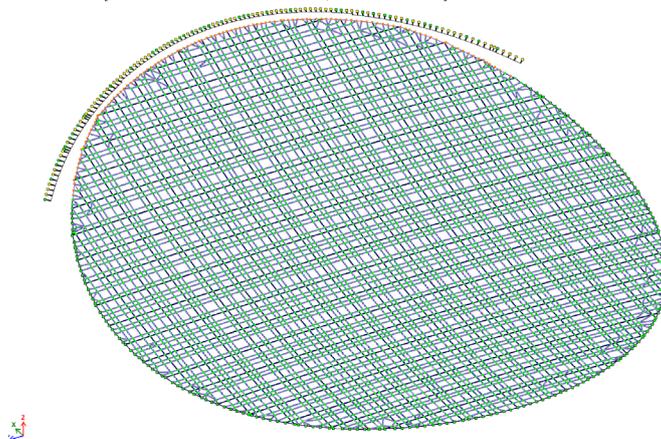


Рис. 1. Конечно-элементная модель исследуемой оболочки

Закрепление опорного контура производится пружинами конечной жесткости в каждом узле КЭ-сети контура по 3 осям: в радиальном направлении оболочки, в тангенциальном, в бинормальном. Исследуются 3 вида закрепления опорного контура оболочки:

- 1 вид. Жесткое закрепление по 3 ортогональным осям;
- 2 вид. Абсолютно податливое закрепление в радиальном и тангенциальном направлениях, жесткое в бинормальном;
- 3 вид. Закрепление конечной жесткости в радиальном и тангенциальном направлениях, соответствующее опиранию контура на кирпичную кладку, в виде приведенной жесткости сцепления. Закрепление в бинормальном направлении — жесткое.

2. Результаты и обсуждения

2.1. Перемещения оболочки

Как видно из рис. 2–4, формы деформирования оболочки, а также численные значения перемещений узлов КЭ-сети отличаются в зависимости от условий закрепления опорного контура, при этом наибольшее отличие характерно для абсолютно податливого закрепления контура.

1.Напряжение+СВ [1. Основная задача; C1. Основная задача; D1. Основная задача]
Изометрия перемещений по Z
Главная ось измерения - мм

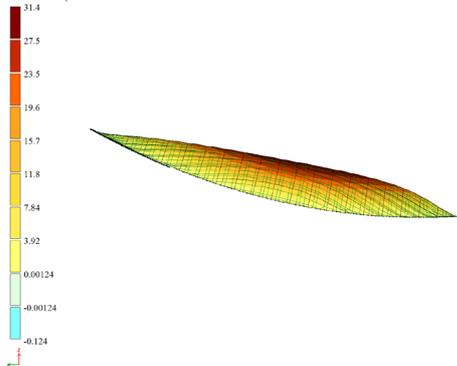


Рис. 2. 1 вид закрепления. Перемещения по Z (макс. значение 33.9 мм)

1.Напряжение+СВ [1. Основная задача; C1. Основная задача; D1. Основная задача]
Изометрия перемещений по Z
Главная ось измерения - мм

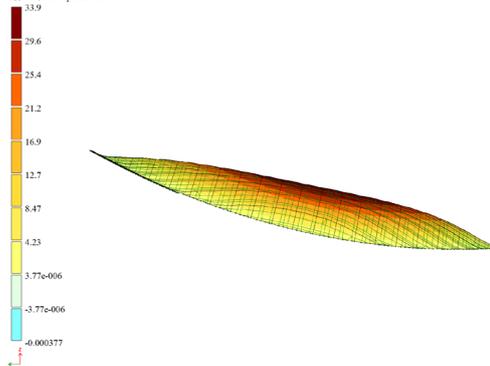


Рис. 3. 2 вид закрепления. Перемещения по Z (макс. значение 41.3 мм)

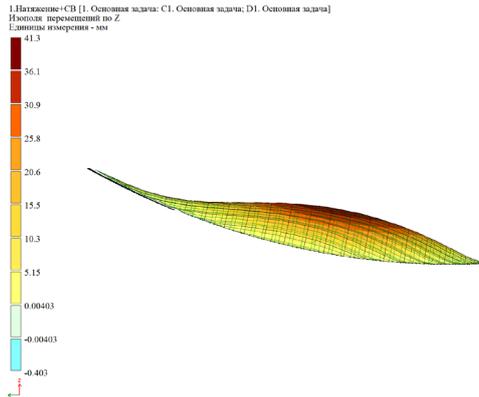


Рис. 4. 3 вид закрепления. Перемещения по Z (макс. значение 31.4 мм)

2.2. Напряжения

Как следует из рис. 5, 8, при жестком закреплении контура оболочка не обжимается в направлении стягивающих канатов, появляются растягивающие напряжения, что не соответствует реальной работе конструкции. В случае абсолютно податливого закрепления (рис. 6, 9) и закрепления с конечной жесткостью (рис. 7, 10) оболочка обжимается в обоих направлениях, при этом максимальные напряжения зафиксированы для случая с абсолютно податливым опорным контуром.

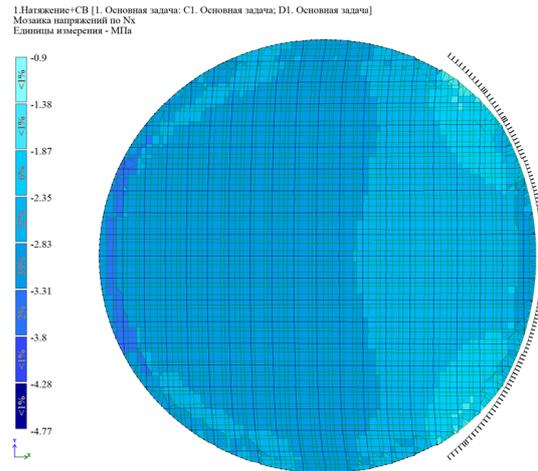
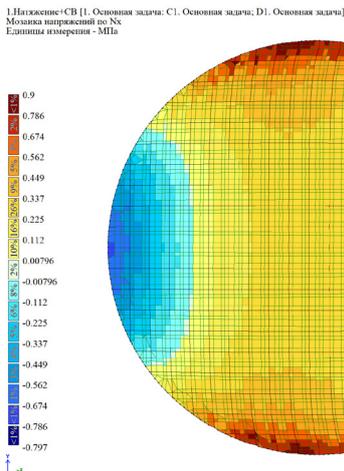


Рис. 5. 1 вид закрепления. Напряжения Nx, МПа Рис. 6. 2 вид закрепления. Напряжения Nx, МПа

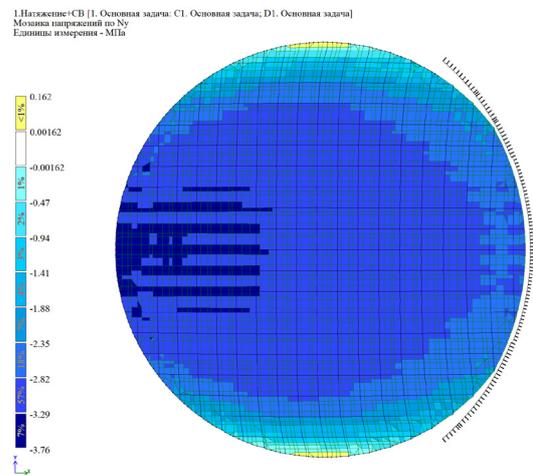
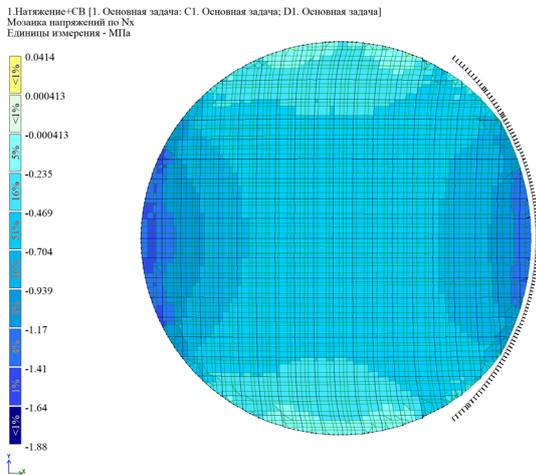
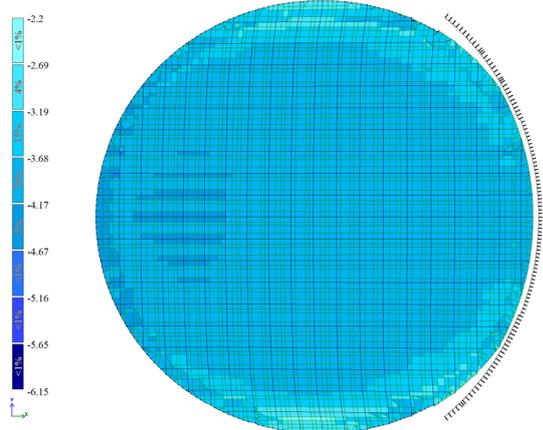


Рис. 7. 3 вид закрепления. Напряжения Nx, МПа Рис. 8. 1 вид закрепления. Напряжения Ny, МПа

1. Напряжение+СВ [1. Основная задача; С1. Основная задача; D1. Основная задача]
Мозаика напряжений по Ny
Единицы измерения - МПа



1. Напряжение+СВ [1. Основная задача; С1. Основная задача; D1. Основная задача]
Мозаика напряжений по Ny
Единицы измерения - МПа

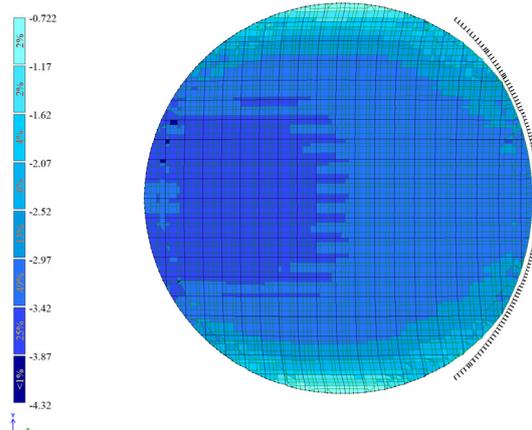


Рис. 9. 2 вид закрепления. Напряжения N_y , МПа Рис. 10. 3 вид закрепления. Напряжения N_y , МПа

Заключение

В работе было рассмотрено влияние податливости опорного контура оболочки на характер деформирования, характер распределения и уровень напряжений исследуемой оболочки.

По итогам численного моделирования выявлены различия в формах и величинах перемещений по оси Z для всех 3 видов закреплений, при этом формы перемещений для жесткого закрепления и закрепления с конечной жесткостью схожи.

Выявлено растяжение в стадии обжатия оболочки по направлению стягивающих вант в случае жесткого закрепления, что не характерно для реальной работы конструкции. Следовательно, в данном случае жесткое закрепление контура не может быть применено для дальнейшего моделирования конструкции. В случае абсолютно податливого закрепления и закрепления с конечной жесткостью оболочка обжимается в обоих направлениях, при этом наибольшее обжатие в направлениях рабочих и стягивающих канатов наблюдается в случае абсолютно податливого контура.

По итогам сравнительного анализа к дальнейшему рассмотрению рекомендуется закрепление опорного контура с конечной жесткостью, моделирующее взаимодействие опорной конструкции — кирпичной стены и контура оболочки, поскольку наиболее соответствует реальной работе конструкции, что подтверждается характером деформирования оболочки, а также характером распределения и уровнем напряжений по направлениям рабочих и стягивающих вант.

Литература

1. Баранова Д. А. Компьютерное моделирование местных и общих форм потери устойчивости тонкостенных оболочек / Д. А. Баранова, В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 229–244.
2. СП 387.1325800.2018 «Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. Правила проектирования».
3. Пояснительная записка по монтажу висячей оболочки цирка в г. Новосибирске. Министерство культуры СССР. Государственный проектный институт «ГИПРОТЕАТР», 1967 г.
4. Голоскоков Д. П. Изгиб ребристой пластины при сложном нагружении / Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 120–130.

5. Семенов А. А. Анализ прочности оболочечных конструкций из современных материалов в соответствии с различными критериями прочности / А. А. Семенов // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. – 2018. – № 1. – С. 16–33.

6. Карнов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2023. – Т. 23, вып. 3. – С. 370–410.

7. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 561–577.

8. Милейковский И. Е., Купар А. К. *Гипары*. Расчет и проектирование пологих оболочек покрытий в форме гиперболических параболоидов. – Москва : Стройиздат, 1978. – 223 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ПОРОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА С САМООПРЕДЕЛЯЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ ЗОНЫ СХЛОПНУВШИХСЯ ПОР

Д. В. Гоцев, Н. В. Панина

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация. В работе построено приближённое аналитическое решение обобщённой задачи Ламе для толстостенного цилиндра, изготовленного из радиально неоднородного пороупругого материала. Модель учитывает двухфазное поведение среды: упругое деформирование пористой структуры до полного сжатия пор и последующее упругое деформирование несжимаемого скелета. Граница между указанными зонами не задаётся априори, а определяется самосогласованно из условия равенства объёмной деформации начальной пористости. Предложен итерационный метод, позволяющий получать поля перемещений и напряжений в аналитическом виде даже при сложных (в том числе немонотонных) профилях упругих характеристик. Проведён параметрический анализ влияния вида функции неоднородности на распределение компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС).

Ключевые слова: напряжённо-деформированное состояние, пороупругость, радиальная неоднородность, задача Ламе, немонотонные упругие характеристики, итерационный метод, краевая задача с неизвестной границей.

Введение

В настоящее время в различных отраслях промышленности — от строительства и горного дела до авиа- и ракетостроения — всё острее проявляется противоречие между растущими требованиями к прочности, надёжности и безопасности конструкций и стремлением к снижению их массы, габаритов и стоимости. Разрешение этого противоречия требует разработки новых функциональных материалов, обладающих сложной внутренней структурой и, как правило, неоднородными механическими свойствами.

Неоднородность упругих характеристик может быть обусловлена как самим процессом формирования материала (например, в бетонах, полимерах, металлических сплавах или горных породах [1, 6, 7]), так и особенностями конструкции (слоистые тела, подземные выработки и полости). Также на распределение механических свойств существенно влияют внешние физические поля — температурные, радиационные, ударные или взрывные нагрузки [2–4, 10].

Для корректного описания поведения таких материалов возникает необходимость в решении взаимосвязанных задачи: первая — это формирование экспериментально установленной зависимости упругих характеристик от определяющего фактора (одним из примеров — это температура или давление), а вторая — подобрать подходящую аппроксимирующую функцию. При решении поставленных задач необходимо учитывать, что аппроксимирующая функция должна быть как простой для обеспечения аналитической или численной разрешимости задачи, так и адекватно отражать реальные экспериментальные данные, ведь даже незначительные различия в выборе аппроксимации могут привести к существенно различным результатам расчётов.

В большинстве исследований в качестве моделей неоднородности используют линейные, степенные или экспоненциальные зависимости [1, 6, 10]. Но не всегда использование данных функциональных зависимостей передает качественные особенности реального распределения свойств — в частности, немонотонный характер изменения модуля упругости или

коэффициента Пуассона. Такой эффект, например, наблюдается вблизи контура горных выработок, где для их создания используют буровзрывной способ: здесь механические характеристики материала могут иметь выраженные максимумы или минимумы в зависимости от расстояния до выработки.

Особое внимание при моделировании подобных материалов следует уделять их пористой структуре, объем которой у большинства природных (грунты, горные породы) и технических материалов содержат поры и изменяется под действием внешних нагрузок. Это приводит к эффекту разносопротивляемости: при сжатии до полного закрытия пор материал демонстрирует повышенную податливость, а после уплотнения его жесткость значительно возрастает. Учет этого явления необходим при решении задач в горной механике, строительной физике, а также в проектировании элементов конструкций из композитов и пористых сплавов.

Разработке математических моделей поведения пористых сред посвящены многочисленные исследования. Тем не менее, универсальной теории, охватывающей все аспекты деформирования таких материалов, на сегодняшний день не существует. Одним из перспективных подходов является использование реологических моделей, включающих элемент жесткого контакта, который позволяет описать переход от пористого состояния к сплошному. Комбинируя такой элемент с классическими: упругой пружиной, вязким демпфером и пластическим шарниром, удаётся построить математические модели, которые учитывают [16] упруговязкопластические свойства скелета пористой среды при уплотнении.

Именно построенная таким образом модель дала возможность ранее решить задачи деформирования и устойчивости крепи вертикальных горных выработок. В настоящей работе этот подход применён к осесимметричной задаче о напряжённо-деформированном состоянии толстостенного цилиндра, изготовленного из радиально неоднородного пороупругого материала. Рассмотрены различные виды функций неоднородности, включая немонотонные зависимости, и проанализировано их влияние на распределение радиальных и окружных напряжений, а также на поле перемещений с учётом начальной пористости.

1. Уравнения, определяющие напряженно-деформированное состояние неоднородной пороупругой среды

На основании модели, предложенной в работе [16] опишем поведение непрерывно неоднородных пористых тел при упругой работе материала, структурная схема которой представлена на рис. 1.

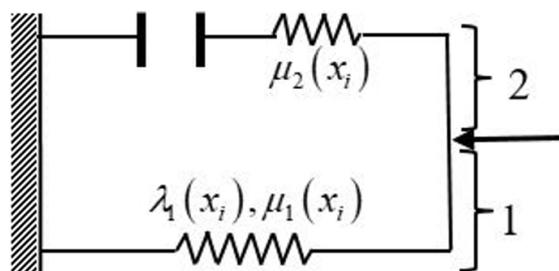


Рис. 1. Структурная схема неоднородной пороупругой среды

Она представима параллельным соединением неоднородного упругого сжимаемого элемента «1» (характеристики — коэффициенты Ляме $\lambda_1(x_i)$, $\mu_1(x_i)$ — функции координат) и последовательной связки «2» жесткого контакта (характеристика — начальный раствор пор ε_0) и неоднородного упругого несжимаемого элемента (характеристика — коэффициент упругости $\mu_0(x_i)$).

Так как материал рассматриваемой модели считается сплошной средой, напряженное состояние которой характеризуется симметричным тензором напряжений σ_j^β . Поля

напряжений и деформаций такой среды будем определять соотношениями геометрически линейной теории, что вполне оправдано для достаточно жестких сред.

Рассмотрим произвольную систему координат для выбранной модели и основные соотношения, которые описывают механическое поведение неоднородных пористых сред при упругом поведении материала в рамках выбранной модели:

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0, \quad (1)$$

где символ ∇_i обозначает ковариантную производную по i -й координате; X_j — массовые силы.

Граничные условия на части S_1 поверхности тела, где заданы напряжения запишем в форме

$$N_i \sigma_j^i = P_j, \quad (2)$$

где N_i — орты нормали к части поверхности S_1 тела, P_j — составляющие вектора поверхностных сил;

В качестве геометрических соотношений при условии малых деформаций будем использовать соотношения Коши, связывающие компоненты ε_j^i симметричного тензора деформации с компонентами вектора перемещений u_i

$$2\varepsilon_j^i = \nabla_j u^i + \nabla^i u_j. \quad (3)$$

В качестве условия полного сжатия пор в точке среды [18] примем условие равенства объемной деформации Θ в этой точке величине начального раствора пор — ε_0

$$\Theta = \varepsilon_\alpha^\alpha = -\varepsilon_0. \quad (4)$$

Согласно предложенной модели при деформировании упругого неоднородного пористого материала в теле наряду с областями деформирования неоднородной сжимаемой пористой среды — V_1 при выполнении условия (4) могут возникнуть области упругого деформирования неоднородного сжатого скелета — V_2 при неизменной объемной деформации. Связь между напряжениями и деформациями в области V_1 выберем в виде закона Гука для сжимаемого тела

$$\sigma_j^i = \begin{cases} \lambda_1(x_k) \Theta g_j^i + 2\mu_1(x_k) \varepsilon_j^i, \\ -\Theta < \varepsilon_0, \end{cases} \quad (5)$$

где g_j^i смешанные компоненты метрического тензора, $\lambda_1(x_k)$, $\mu_1(x_k)$ параметры Ламе сжимаемого тела, являющиеся непрерывными функциями пространственных координат.

В области V_2 упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела [16]

$$S_j^i = \begin{cases} 2\mu(x_k) \varepsilon_j^i - 2\mu_0(x_k) (\varepsilon_j^i)_0 + \frac{2}{3} \mu_1(x_k) \varepsilon_0 g_j^i, \\ -\Theta = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (6)$$

где S_j^i — компоненты тензора девиатора напряжений; $(\varepsilon_j^i)_0$ — компоненты тензора упругих деформаций, вычисленные на момент полного сжатия пор, то есть при выполнении условия (4); $\mu(x_k) = \mu_0(x_k) + \mu_1(x_k)$ — переменный модуль сдвига материала с полностью сжатой матрицей.

Если в теле наряду с зоной V_1 — не полностью сжатых пор существует и зона V_2 — с полностью сжатым скелетом, то на границе γ раздела этих областей должны выполняться условия непрерывности перемещений и поверхностных сил:

$$\left[u_j \right]_\gamma = 0, \quad \left[N_i \sigma_j^i \right]_\gamma = 0. \quad (7)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений, соответствующих зонам V_1 и V_2 деформирования материала на границе γ . По повторяющимся индексам, если особо не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

2. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния радиально неоднородного пороупругого цилиндра с самоопределяемой границей зоны схлопнувшихся пор

Далее рассмотрим в рамках предложенной модели деформирования пористого упругого материала с непрерывной зависимостью параметров Ламе $\mu_1 = \mu_1(r)$ и $\mu_2 = \mu_2(r)$ от радиальной координаты при постоянстве коэффициента Пуассона — ν_1 задачу о деформировании толстостенного цилиндрического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями q_a и q_b равномерно распределённых по внутренней ($r = a$) и внешней ($r = b$) поверхности (рис. 2).

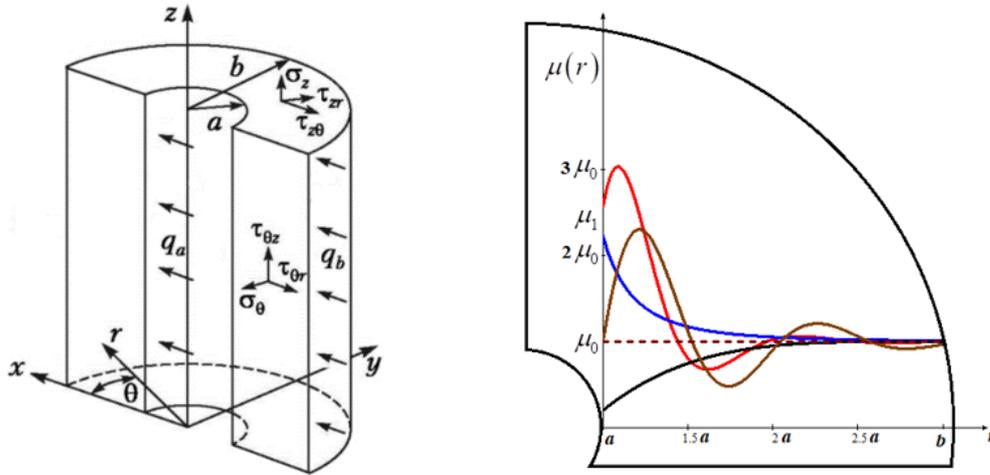


Рис. 2. Расчетная схема для радиально неоднородного цилиндрического тела, находящегося под действием равномерно распределенных сжимающих нагрузок

Отметим, что рассматриваемая классификация неоднородности материала наиболее естественна как с математической, так и с физической точки зрения [1, 8, 12].

Исходя из описанной выше постановки задачи, имеет место осевая симметрия. Тогда НДС рассматриваемого цилиндрического тела в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в обеих областях деформирования (V_1 и V_2) будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты

$$\sigma_r^i = \sigma_r^i(r), \quad \sigma_\theta^i = \sigma_\theta^i(r), \quad \sigma_z^i = \sigma_z^i(r), \quad \varepsilon_r^i = \varepsilon_r^i(r), \quad \varepsilon_\theta^i = \varepsilon_\theta^i(r), \quad \varepsilon_z^i = \text{const}, \quad u^i = u^i(r). \quad (8)$$

Здесь и далее индекс $i = 1$ вверху величин обозначает их принадлежность к области V_1 деформирования пористого материала, а $i = 2$ к области деформирования V_2 материала с полностью сжатой матрицей.

С учетом (8) три уравнения равновесия (1) для каждой из двух областей деформирования преобразуются к одному уравнению

$$\frac{d \sigma_r^i}{dr} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0 \quad (9)$$

соотношения Коши (2) примут вид

$$\varepsilon_r^i = \frac{du^i}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^i = \frac{u^i}{r}. \quad (10)$$

Связь между напряжениями и деформациями (5) при упругом деформировании неоднородной пористой среды (область V_1) с учетом (8), (10) через параметры $\mu_1(r)$ и ν , переписется в форме

$$\sigma_r^1 = 2\mu_1(r) \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \Theta + \varepsilon_r^1 \right), \quad \sigma_\theta^1 = 2\mu_1(r) \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \Theta + \varepsilon_\theta^1 \right), \quad \sigma_z^1 = 2\mu_1(r) \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \Theta + \varepsilon_z^1 \right). \quad (11)$$

Упругие деформации в области V_2 деформирования материала с полностью сжатой матрицей связаны с напряжениями соотношениями (6), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned} S_r^2 &= 2\mu(r) \varepsilon_r^2 - 2\mu_2(r) \varepsilon_r^1(\gamma) + \frac{2}{3} \mu_1(r) \varepsilon_0, & S_\theta^2 &= 2\mu(r) \varepsilon_\theta^2 - 2\mu_2(r) \varepsilon_\theta^1(\gamma) + \frac{2}{3} \mu_1(r) \varepsilon_0, \\ S_z^2 &= 2\mu(r) \varepsilon_z^2 + \frac{2}{3} \mu_1(r) \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия сопряжения (7) на границе раздела γ зон упругого деформирования пористого материала и деформирования материала с полностью сжатой матрицей запишутся в виде

$$\left(\sigma_r^1 - \sigma_r^2 \right) \Big|_{r=\gamma} = 0, \quad \left(u^1 - u^2 \right) \Big|_{r=\gamma} = 0, \quad (13)$$

Радиус γ границы раздела зон V_1 и V_2 деформирования пористого материала определим из условия равенства на ней объемной деформации начальному удельному раствору пор — ε_0 , то есть из соотношения

$$\Theta^1 = -\varepsilon_0. \quad (14)$$

Далее рассмотрим случай, когда уравнение (14) имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$, при этом области V_1 соответствует отрезок $[a, \gamma]$, а области V_2 — отрезок $[\gamma, b]$. Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r^1 \Big|_{r=a} = -q_a, \quad \sigma_r^2 \Big|_{r=b} = -q_b. \quad (15)$$

Соотношения (9)–(14), вместе с граничными условиями (15) представляют собой взаимосвязанные математические модели, описывающие напряженно-деформированные состояния цилиндрического тела на этапах упругого деформирования неоднородной пористой среды и упругого деформирования материала с полностью сжатым скелетом.

2.1. Определим НДС в области V_1 деформирования материала при наличии несхлопнутых пор следующим образом

Уравнение равновесия (9) с учетом (10), (11) в перемещениях переписывается в форме

$$\mu_1(r) u'' + \left(\mu_1'(r) + \frac{\mu_1(r)}{r} \right) u' + \left(\frac{\nu}{(1-\nu)} \mu_1'(r) - \frac{\mu_1(r)}{r} \right) \frac{u}{r} = \frac{\nu}{\nu-1} \mu_1'(r) \varepsilon_z^1,$$

которое в свою очередь можно преобразовать к виду [13]

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_1(r)}{r} \left(u \cdot r \right)' \right) = \frac{\mu_1'(r)}{1-\nu} \left((1-2\nu) \frac{u}{r} - \nu \varepsilon_z^1 \right). \quad (16)$$

Полученная запись (16) уравнения равновесия позволяет организовать для поиска его приближенного решения итерационный процесс в форме

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_1(r)}{r} \frac{d}{dr} \left(u_{k+1} \cdot r \right) \right) = \frac{\mu_1'(r)}{1-\nu} \left((1-2\nu) \frac{u_k}{r} - \nu \varepsilon_z^1 \right). \quad (17)$$

Тогда итерационная формула для определения радиальной компоненты вектора перемещений примет вид

$$u_{k+1}^1 = \frac{A_{k+1}}{r} \int_a^r \frac{x}{\mu_1(x)} dx + \frac{B_{k+1}}{r} + G_k(r) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon_z^1 r, \quad (18)$$

где приняты следующие обозначения: A_{k+1} , B_{k+1} — константы интегрирования,

$$G_k(r) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_a^r Q_k(y) dy, \quad Q_k(y) = \frac{y}{\mu_1(y)} \int_a^y \mu_1'(x) \frac{u_k}{x} dx. \quad (19)$$

Из соотношений Коши (10) при учете (18) получим итерационные соотношения для компонент деформаций и объемной деформации Θ

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_r \right)_{k+1}^1 &= A_{k+1} \left(\frac{1}{\mu_1(r)} - \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{x}{\mu_1(x)} dx \right) - \frac{B_{k+1}}{r^2} + \frac{dG_k(r)}{dr} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon_z^1, \\ \left(\varepsilon_\theta \right)_{k+1}^1 &= \frac{A_{k+1}}{r^2} \int_a^r \frac{x}{\mu_1(x)} dx + \frac{B_{k+1}}{r^2} + \frac{G_k(r)}{r} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon_z^1, \\ \Theta_{k+1}^1 &= \frac{A_{k+1}}{\mu_1(r)} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{Q_k(r)}{r} + \varepsilon_z^1 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя закон Гука (11) с учетом (20) получим итерационные соотношения для определения компонент напряжений в форме

$$\begin{aligned} \left(\sigma_r \right)_{k+1}^1 &= 2\mu_1(r) \left(A_{k+1} F(r) - \frac{B_{k+1}}{r^2} + H_k(r) \right), \quad \left(\sigma_\theta \right)_{k+1}^1 = 2\mu_1(r) \left(M(r) A_{k+1} + \frac{B_{k+1}}{r^2} + T_k(r) \right), \\ \left(\sigma_z \right)_{k+1}^1 &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \left(A_{k+1} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \mu_1(r) \left(\frac{Q_k(r)}{r} + \frac{1}{\nu} \varepsilon_z^1 \right) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{\mu_1(r)} - \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{x}{\mu_1(x)} dx, \quad M(r) = \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{\mu_1(r)} - F(r), \\ H_k(r) &= \frac{Q_k(r)}{r} + \frac{2\nu-1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r Q_k(y) dy + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \varepsilon_z^1, \\ \dot{Q}_k(r) &= \frac{1}{1-\nu} \frac{Q_k(r)}{r} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_z^1 - H_k(r). \end{aligned} \quad (22)$$

Радиус γ границы раздела зон $V_1(r \in [a, \gamma])$ и $V_2(r \in [\gamma, b])$ деформирования пористого материала в k -м приближении определим из условия (14), которое с учетом (19) и (20) примет вид

$$\frac{A_{k+1}}{\mu_1(\gamma)} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{\mu_1(\gamma)} \int_a^\gamma \mu_1'(x) \frac{u_k}{x} dx + \varepsilon_z^1 \right) = -\varepsilon_0. \quad (23)$$

2.2. Перейдем теперь к определению напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела в области V_2 ($r \in [\gamma, b]$) деформирования материала с полностью сжатой матрицей

Согласно предложенной модели объемная деформация в рассматриваемой области не меняется и равна начальному удельному раствору пор — ε_0 , то есть имеет место условие

$$\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2 = -\varepsilon_0, \quad (24)$$

из которого с учетом (10) получим

$$u^2 = \frac{C_1}{r} - \left(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z \right) \frac{r}{2}, \quad (25)$$

где C_1 — константа интегрирования.

Из (12) следует, что $\overset{2}{S}_r - \overset{2}{S}_\theta = \overset{2}{\sigma}_r - \overset{2}{\sigma}_\theta = 2\mu(r)\left(\overset{2}{\varepsilon}_r - \overset{2}{\varepsilon}_\theta\right) + 2\mu_2(r)\left(\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma)\right)$ или учитывая (10) и (25)

$$\overset{2}{\sigma}_r - \overset{2}{\sigma}_\theta = -4\mu(r)\frac{C_1}{r^2} + 2\mu_2(r)\left(\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma)\right). \quad (26)$$

При этом разность деформаций в области V_1 при $r = \gamma$, с учетом (19), (20) определится в форме

$$\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma) = A_{k+1} \cdot \Phi(\gamma) + \frac{2B_{k+1}}{\gamma^2} + P_k(\gamma), \quad (27)$$

где $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\gamma^2} \int_a^\gamma \frac{x}{\mu_1(x)} dx - \frac{1}{\mu_1(\gamma)}$, $P_k(\gamma) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^2} \left(2 \int_a^\gamma Q_k(y) dy - \gamma \cdot Q_k(\gamma) \right)$. (28)

Подставляя (26) в (9) получим уравнение вида $\frac{d\overset{2}{\sigma}_r}{dr} = 4\mu(r)\frac{C_1}{r^3} - \frac{2\mu_2(r)}{r}\left(\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma)\right)$, интегрируя которое с учетом граничного условия (15) на внешней поверхности приходим к соотношению

$$\overset{2}{\sigma}_r(r) = 2\left(\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma)\right) \int_r^b \frac{\mu_2(x)}{x} dx - 4C_1 \int_r^b \frac{\mu(x)}{x^3} dx - q_b. \quad (29)$$

Вторую компоненту тензора напряжений определим из (26) с учетом (29)

$$\overset{2}{\sigma}_\theta = 4C_1 \left(\frac{\mu(r)}{r^2} - \int_r^b \frac{\mu(x)}{x^3} dx \right) + 2\left(\overset{1}{\varepsilon}_\theta(\gamma) - \overset{1}{\varepsilon}_r(\gamma)\right) \left(\int_r^b \frac{\mu_2(x)}{x} dx - \mu_2(r) \right) - q_b. \quad (30)$$

2.3. Определение констант интегрирования

Константы интегрирования A_{k+1}, B_{k+1}, C_1 определим из линейной системы (13), (15), которая с учетом (18), (19), (21), (22), (25), (27)–(30) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \varphi_{11}A_{k+1} + B_{k+1} - C_1 = \delta_1, \\ \varphi_{21}A_{k+1} - B_{k+1} = \delta_2, \\ \varphi_{31}A_{k+1} + \varphi_{32}B_{k+1} + \varphi_{33}C_1 = \delta_3, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= X(\gamma), \quad \varphi_{21} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{a^2}{\mu_1(a)}, \quad \varphi_{31} = \mu_1(\gamma)F(\gamma) - \Phi(\gamma)Z(\gamma), \quad \varphi_{32} = -\frac{1}{\gamma^2}(\mu_1(\gamma) + 2Z(\gamma)), \\ \varphi_{33} &= 2Y(\gamma), \quad \delta_1 = \left(\frac{\nu}{1-\nu} \overset{1}{\varepsilon}_z - \overset{2}{\varepsilon}_z - \varepsilon_0 \right) \frac{\gamma^2}{2} - G_k(\gamma)\gamma, \quad \delta_2 = -\left(\frac{q_a}{2\mu_1(a)} + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \overset{1}{\varepsilon}_z \right) a^2, \\ \delta_3 &= P_k(\gamma)Z(\gamma) - \mu_1(\gamma)H_k(\gamma) - \frac{q_b}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$X(r) = \int_a^r \frac{x}{\mu_1(x)} dx, \quad Y(r) = \int_r^b \frac{\mu(x)}{x^3} dx, \quad Z(r) = \int_r^b \frac{\mu_2(x)}{x} dx.$$

Решая систему (31) получим

$$A_{k+1} = \frac{\varphi_{33}\delta_1 + (\varphi_{32} + \varphi_{33})\delta_2 + \delta_3}{\varphi_{31} + \varphi_{21}\varphi_{32} + \varphi_{33}(\varphi_{11} + \varphi_{21})}, \quad B_{k+1} = \varphi_{21}A_{k+1} - \delta_2, \quad C_1 = \varphi_{11}A_{k+1} + B_{k+1} - \delta_1. \quad (33)$$

Таким образом, НДС пороупругого неоднородного цилиндрического тела в области — V_1 деформирования пористого материала при $r \in [a, \gamma]$ определяется итерационными формулами (18), (20), (21) с учетом обозначений (19), (22), а в области V_2 деформирования материала с полностью сжатой матрицей при $r \in [\gamma, b]$ соотношениями (25), (29), (30) с учетом обозначений (27), (28). При этом константы интегрирования определяются равенствами (33), (32), а величина радиуса γ границы раздела областей V_1 и V_2 деформирования пороупругого материала находится из решения уравнения (23).

2.4. Первое приближение

Для последовательного определения констант интегрирования и компонент НДС рассматриваемой задачи в качестве начального приближения выберем при $k = 0$, $u_0 = 0$ и для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что реализуется плоско-деформированное состояние, т. е. $\varepsilon_z = \varepsilon_z = 0$. Тогда из (19), (22), (28) получим

$$Q_0(r) = G_0(r) = \frac{d}{dr}(G_0(r)) = H_0(r) = P_0(\gamma) = 0. \quad (34)$$

Используя формулы (18), (20), (21), с учетом (34), а так же введенных обозначений (19) и (22), при принятых допущениях $u_0 = 0$, $\varepsilon_z = \varepsilon_z = 0$ поля перемещений, деформаций и напряжений в первом приближении переписутся в виде — в области V_1 — деформирования пористого материала при $r \in [a, \gamma]$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r}(A_1 \cdot X(r) + B_1), \quad \Theta_1 = \frac{A_1}{\mu_1(r)}, \\ \left(\varepsilon_r \right)_1 &= A_1 \left(\frac{1}{\mu_1(r)} - \frac{1}{r^2} \cdot X(r) \right) - \frac{B_1}{r^2}, \quad \left(\varepsilon_\theta \right)_1 = \frac{1}{r^2}(A_1 \cdot X(r) + B_1), \\ \left(\sigma_r \right)_1 &= 2\mu_1(r) \left(A_1 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{\mu_1(r)} - \frac{1}{r^2} \cdot X(r) \right) - \frac{B_1}{r^2} \right), \\ \left(\sigma_\theta \right)_1 &= 2\mu_1(r) \left(A_1 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1}{\mu_1(r)} + \frac{1}{r^2} \cdot X(r) \right) + \frac{B_1}{r^2} \right), \quad \left(\sigma_z \right)_1 = \frac{2\nu}{1-2\nu} A_1; \end{aligned} \quad (35)$$

— в области V_2 деформирования материала с полностью сжатой матрицей при $r \in [\gamma, b]$

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{C_1}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2} r, \quad \varepsilon_r^2 = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta^2 = \frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ \sigma_r^2(r) &= 2 \left(A_1 \cdot \Phi(\gamma) + \frac{2B_1}{\gamma^2} \right) Z(r) - 4C_1 \cdot Y(r) - q_b, \\ \sigma_\theta^2 &= 4C_1 \left(\frac{\mu(r)}{r^2} - Y(r) \right) + 2 \left(A_1 \cdot \Phi(\gamma) + \frac{2B_1}{\gamma^2} \right) (Z(r) - \mu_0(r)) - q_b. \end{aligned} \quad (36)$$

Константы интегрирования (33) с учетом (34) переписутся в виде

$$A_1 = \frac{\varphi_{33}\delta_1 + (\varphi_{32} + \varphi_{33})\delta_2 + \delta_3}{\varphi_{31} + \varphi_{21}(\varphi_{32} + \varphi_{33}) + \varphi_{33}\varphi_{11}}, \quad B_1 = \varphi_{21}A_1 - \delta_2, \quad C_1 = \varphi_{11}A_1 + B_1 - \delta_1, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = X(\gamma), \quad \varphi_{21} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{a^2}{\mu_1(a)}, \quad \varphi_{31} = \mu_1(\gamma)F(\gamma) - \Phi(\gamma)Z(\gamma), \quad \varphi_{32} = -\frac{1}{\gamma^2}(\mu_1(\gamma) + 2Z(\gamma)), \\ \varphi_{33} = 2Y(\gamma), \quad \delta_1 = -\varepsilon_0 \frac{\gamma^2}{2}, \quad \delta_2 = -\frac{q_a}{2\mu_1(a)}a^2, \quad \delta_3 = -\frac{q_b}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (23) для определения радиуса γ границы раздела областей V_1 и V_2 с учетом (35)–(37) примет вид

$$\frac{Y(\gamma)\varepsilon_0\gamma^2 + \frac{q_a}{2\mu_1(a)}W(\gamma)a^2 + \frac{q_b}{2}}{\frac{1-\nu}{1-2\nu} + \left(X(\gamma) + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{a^2}{\mu_1(a)} \right) W(\gamma) + \frac{Z(\gamma)}{\mu_1(\gamma)}} - \varepsilon_0\mu_1(\gamma) = 0, \quad (39)$$

где $W(\gamma) = 2Y(\gamma) - \frac{1}{\gamma^2}(\mu_1(\gamma) + 2Z(\gamma))$.

Таким образом, в рамках плоской деформации НДС пороупругого радиально неоднородного цилиндрического тела в первом приближении, при выборе в качестве начального приближения — нулевого решения, в области — V_1 ($a \leq r \leq \gamma$) определяется формулами (35), а в области V_2 ($\gamma \leq r \leq b$) соотношениями (36). При этом константы интегрирования определяются равенствами (37), (38), а величина радиуса γ границы раздела областей V_1 и V_2 находится из решения уравнения (39).

3. Вычислительный эксперимент

В качестве функций, моделирующих немонотонный характер распределения упругих характеристик материала вдоль радиальной координаты в областях деформирования V_1 и V_2 , где $l = \frac{\hat{\mu}}{\mu_0}$ — значение параметра Ламе вблизи контура при $r = a$, μ_0 — значение параметра Ламе соответствующее однородному материалу, k, α, β, ω — параметры аппроксимации ($\alpha > 0$).

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \mu_1(r) + \mu_2(r), \\ \mu_1(r) &= \mu_0 \left(1 + ke^{-\alpha r} \left(\cos(\beta r + \omega) + \sin(\beta r + \omega) \right) \right), \\ \mu_2(r) &= \mu_0 \left(1 + (l-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Расчеты проводились для безразмерных величин. При этом величины, имеющие размерность длины, отнесены к внутреннему радиусу a , а имеющие размерность напряжений — к параметру Ламе μ_0 .

На рис. 3 представлены распределения полей напряжений и перемещений совместно с распределением параметра Ламе μ при различных значениях коэффициента Пуассона и параметров аппроксимации l, k, β, ω .

Исходные данные для зависимостей, представленных на рис. 3 брались следующими $a = 1$, $b = 3$, $\mu_0 = 1$, $q_a = 10^{-3}$, $q_b = 3 \cdot 10^{-2}$, $n = 4$, $\varepsilon_0 = 0.02$. Коэффициент Пуассона и значения параметров аппроксимации для различных кривых выбирались согласно данным представленным в табл. 1.

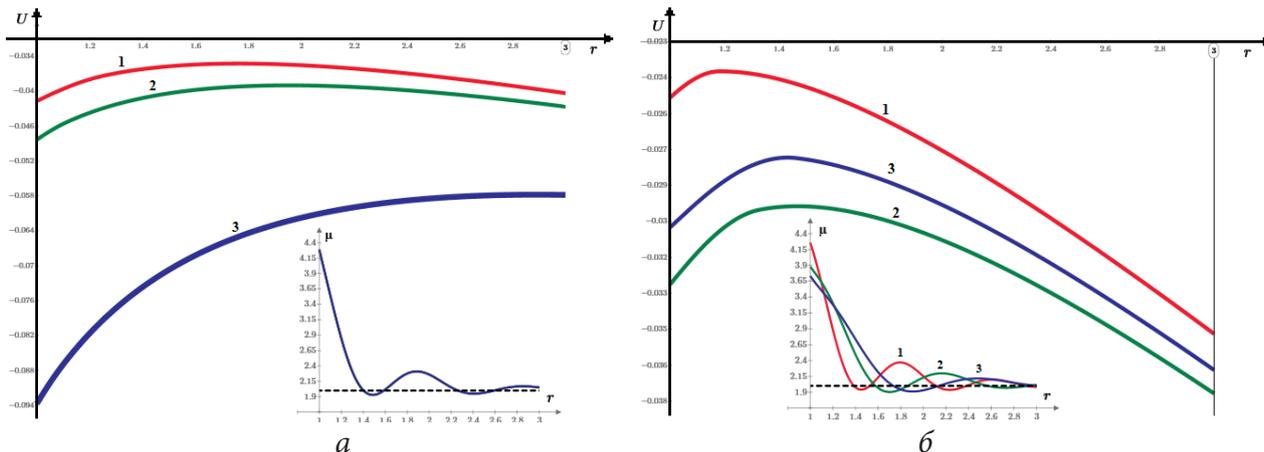


Рис. 3. Распределение перемещений при различных значениях коэффициента Пуассона ν (рис. 3а) и параметра аппроксимации β (рис. 3б)

Таблица 1

Значения коэффициента Пуассона и значения параметров аппроксимации функций распределения неоднородности вдоль радиальной координаты

№ рисунка	№ кривой	Значение l	Значение k	Значение β	Значение ω	Значение ν
Рис. 3а	1	2.5	2.5	6.6	-0.5	0.35
	2	2.5	2.5	6.6	0.5	0.4
	3	2.5	2.5	6.6	0.5	0.45
Рис. 3б	1	2.5	2.5	7.8	-1	0.3
	2	2.5	2.5	6	0	0.3
	3	2.5	2.5	5.4	1	0.3

4. Выводы по работе

1. Разработана математическая модель, для описания НДС цилиндрического тела из по-роупругого радиально неоднородного материала. Получены аналитические решения краевой задачи в виде сходящихся итерационных соотношений.

2. Проведен численный эксперименты для конкретных немонотонных функциональных зависимостей параметра Ламе от радиальной координаты.

3. Осуществлен анализ результатов численного эксперимента, на основании которого сделаны следующие выводы:

- имеет место зависимость компонент НДС от значений параметров аппроксимации, при этом изменения значений параметров аппроксимации может оказывать влияние, как на количественное значение, так и на качественный характер поведения исследуемых компонент НДС;
- наблюдается немонотонный характер поведения компонент НДС с выраженными экстремумами вблизи внутреннего контура;
- наблюдается сходимость соответствующих зависимостей компонент НДС для неоднородного материала в случае стремления модуля сдвига к константе (однородный материал), что является косвенным признаком сходимости полученных итерационных соотношений.

Литература

1. Андреев В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М. : Изд-во АСВ, 2002. – 288 с.

2. Басарыгин Ю. М., Булатов А. И., Проселков Ю. М. Осложнения и аварии при бурении нефтяных и газовых скважин. – М. : Недра-Бизнесцентр, 2000. – 679 с.
3. Вечная мерзлота и освоение нефтегазоносных районов. Под ред. Мельникова. – М. : ГЕОС, 2002. – 402 с.
4. Вялов С. С., Зарецкий Ю. К. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледо-грунтовых ограждений. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 254 с.
5. Зарецкий Ю. К., Чумичев Б. Д., Щеболев А. Г. Вязкопластичность льда и мерзлых грунтов. – Новосибирск : Наука, 1986. – 184 с.
6. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 367 с.
7. Рахманкулов М. М. Metallurgy стратегических металлов и сплавов. – М. : Теплотехник, 2008. – 504 с.
8. Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
9. Улыбин С. А. Теплоносители энергетических реакторов. – М.-Л. : Энергия, 1966. – 272 с.
10. Шарафутдинов Г. З. Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 108–120.
11. Mamrilla J., Mamrillova A., Sarkisian V. Niektore problem matematicky teorie pruzno stianizotropneho anehomogenne hotelesa. – Bratislava, 1988. – 328 p.
12. Naghdi P. M. A critical review of the state of plastisity // ZAMM. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
13. Osinov V. A., Gudehus G. Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body // Mech. Cohesive-Frict. Materials. – 1996. – V. 1. – P. 25–44.
14. Sevostianov I., Kachanov M. On the yield condition for anisotropic porous materials // Mater. Sci. Eng. – 2001. – V. A313. – P. 1–15.
15. Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2010. – 299 с.
16. Гоцев Д. В., Бунтов А. Е., Перунов Н. С. Математическая модель процесса деформирования крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и упруго-вязко-пластических свойств сжатого скелета // Н. Новгород «Проблемы прочности и пластичности». – 2016. – Т. 78, № 3. – С. 241–251.
17. Гоцев Д. В., Бунтов А. Е. Устойчивость монолитной крепи вертикальной горной выработки с учетом начальной пористости материала и неупругой работы сжатого скелета // Вестник СамГУ. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т 20, № 3. – С. 1–18.

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦЕ КОНТАКТА НА ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТАХ

Н. Ю. Зайко¹, О. Н. Любимова², А. В. Морковин¹

¹Дальневосточный федеральный университет

²Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

Аннотация. Разработан новый подход и методика моделирования совместного деформирования коаксиальных цилиндрических элементов, находящихся в различных условиях сопряжения по боковым поверхностям. Учтена неоднородность термомеханических характеристик материалов и ограниченность перемещений вдоль образующей цилиндров для различных сценариев взаимодействия на границе раздела. Параллельно, в рамках классической постановки контактной задачи проведено численное моделирование в конечно-элементном пакете ANSYS для сопряженных цилиндров с разными модулями упругости и коэффициентами линейного температурного расширения.

Ключевые слова: термонапряженное состояние, контактная задача, стеклометаллокомпозит.

Введение

В производстве слоистых композитов, формируемых методами температурного воздействия, ключевым фактором, определяющим механические свойства конечного продукта, является адгезионная прочность межслойных границ [1]. Существенное усложнение задачи возникает при необходимости моделирования покрытий, содержащих дефекты, зоны неидеального контакта или области с неоднородными свойствами в месте соединения [2]. Сохраняет актуальность разработка моделей и методов, пригодных для качественного анализа контактных задач в средах со сложной реологией. Для интерпретации случайных полей часто используются аналитические решения, полученные для тел простой геометрической формы, а также приближенные качественные оценки в рамках феноменологических линейных теорий. Следует отметить, что валидация предлагаемых математических моделей, несмотря на наличие экспериментальных данных, представляет значительную сложность и обычно служит лишь для качественного сопоставления. В связи с этим, развитие линейных моделей, описывающих контактное взаимодействие как результат поведения всей совокупности контактов под нагрузкой, является обоснованным и востребованным направлением в механике контактных взаимодействий. Цель настоящего исследования – создание методики, позволяющей провести качественную оценку прочности сцепления на границе разнородных слоев в коаксиальных цилиндрических композитах с различными реологическими свойствами, деформирующихся в условиях высокотемпературного воздействия [3–6].

Численная реализация в САЕ ANSYS

Рассматривается осесимметричная задача в цилиндрической системе координат для сопряженной системы типа «вал-цилиндр» (например, стержень — оболочка или два цилиндра) при отсутствии закрепления торцов. Основной особенностью задачи является возможность неравномерного деформирования компонентов системы вдоль оси (образующей). В случае однородного температурного поля по всему объему, возникновение напряженно-деформиро-

ванного состояния обусловлено различием механических свойств материалов и их термозависимостью.

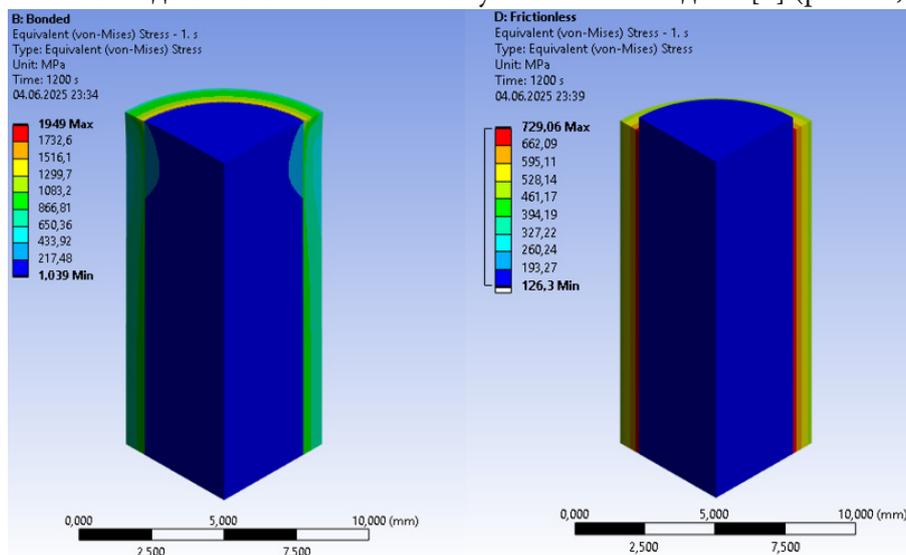
В рамках данной работы исследуется сходимость решений в предложенной в работе [3] постановке к классической постановке контактной задачи в системе анализа МКЭ ANSYS. Задача решалась при разном коэффициенте трения между материалами, который варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01. Для моделирования касательных напряжений в модели когезионной зоны (CZM) при контакте верхней и нижней поверхностей используется изотропный закон трения Кулона.

Моделировался стеклометаллический стержень $R_1 = 0,004$ м, $R_2 = 0,005$ м. Для материалов подобраны следующие теплофизические характеристики: для стали коэффициент температурного линейного расширения $\alpha = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, модуль сдвига $G = 7,46 \cdot 10^4$ МПа, модуль объемной упругости $K = 2,08 \cdot 10^5$ Мпа; для стекла $\alpha = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $G = 2,92 \cdot 10^4$ МПа, $K = 6,33 \cdot 10^4$ МПа.

Рассматривались три вида контакта на границе контактирующих материалов R_i : идеальный контакт; контакт с трением вдоль образующей коэффициент трения μ варьировался от 0 до 1 с шагом 0,01; свободное проскальзывание вдоль образующей при температурном расширении. Сетка конечных элементов задавалась неоднородной, с измельчением на границе контакта, тип элементов SOLID186, гексаэдр. Рассматривается упругая задача, поэтому температурный режим выбран ниже температуры стеклования: равномерное охлаждение от $500 \text{ } ^\circ\text{C}$ до $20 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Во время анализа результатов моделирования выявлены торцевые эффекты, которые охватывают область около 2,5 мм в глубь образца, что негативно сказывается на представлении результатов, так как максимальные напряжения в этой зоне в два раза выше, чем в основном теле образца. Торцевые эффекты наблюдаются при условиях контакта без разделения и контакта с трением, в то время как для условия без трения торцевой эффект не обнаружен (рис. 1а). Для того что бы вывести результаты без торцевых эффектов построена вспомогательная геометрия в виде линии у границы симметрии, т. е. отображаются только напряжения для центральной части длины образца, результаты приведены на рис 1б.

Заметно что в результатах моделирования контакта без разделения максимальные напряжения по Мизесу определяются в стали у границы со стеклом и полностью совпадает со значением полученным в модели, что продемонстрировано на графиках рисунка (рис. 1б, в (слева)). При моделировании контакта без трения напряженно деформированное состояние модели имеет качественно такое же распределение как в случае с контактом без разделения, максимальные напряжения также совпадают со значениями полученными в модели [3] (рис. 1б, в (справа)).



(a)

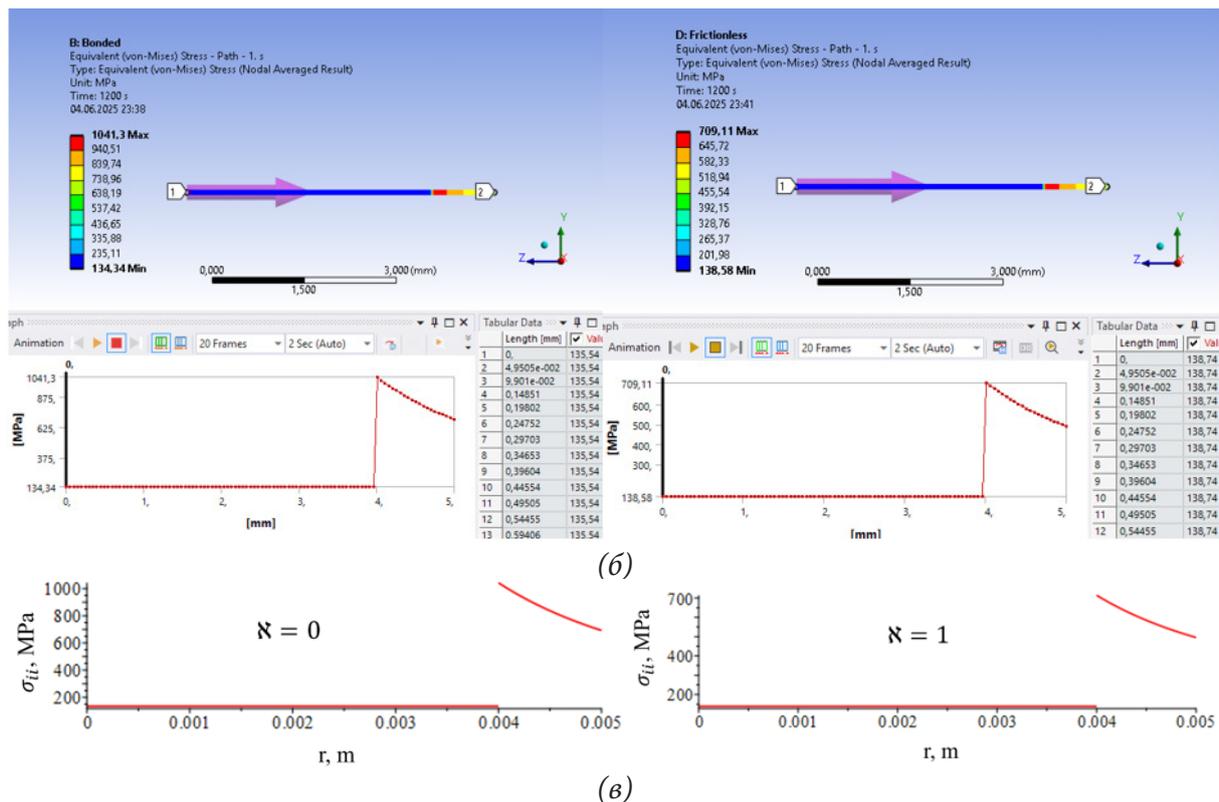


Рис. 1. Эквивалентные напряжения по Мизесу, идеальный контакт (слева) и свободное проскальзывание (справа), тип 1 (стеклометаллокомпозитный стержень). (а), (б) — Реализация в ANSYS; (в) — модель [3]

Заключение

Для подтверждения адекватности предложенной аналитической модели было проведено конечно-элементное моделирование контактной задачи в программном комплексе ANSYS для различных значений коэффициента трения. Установлено согласование результатов численных расчётов с данными, полученными аналитическим путём.

Практическая ценность разработанного метода заключается в его применимости для оценки технологических и остаточных напряжений не только в стеклометаллических композитах, но и в широком классе слоистых цилиндрических конструкций, эксплуатирующихся в условиях знакопеременного термомеханического нагружения при высоких температурах.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075- 00459-25-00

Литература

1. Трыков Ю. П., Гуревич Л. М., Проничев Д. В. Композиционные переходники. Монография. ВолГТУ. – Волгоград, РПК «Политехник», 2007. – 328 с.
2. Горячева И. Г., Торская Е. В. Напряженное состояние двуслойного упругого основания при неполном сцеплении слоев // Трение и износ. – 1998. – Т. 19, № 3. – С. 289–296
3. Зайко Н. Ю., Любимова О. Н. Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания

по границе контакта // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4 (54). – С. 5–13.

4. Любимова О. Н. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стекломаталлокомпозита / О. Н. Любимова, А. В. Морковин, С. А. Дрюк // Материаловедение. – 2017. – № 4. – С. 3–7.

5. Галанин М. П. Математическое моделирование термоупругоупластического контактного взаимодействия системы тел / А. В. Крупкин, В. И. Кузнецов, В. В. Лукин, В. В. Новиков, А. С. Родин, И. В. Станкевич // *Mathematica Montisnigri*. – 2014. – Т. 30. – С. 99–114.

6. Burenin A. A. Stress relaxation in cylindrical glass-to-metal junctions with account for the quality of a junction region / A. A. Burenin, O. N. Lyubimova, E. P. Solonenko // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2018. – Т. 59, № 6. – P. 1095–1103.

ОБ ОЦЕНКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ БИКОПОЗИТА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДЕФЕКТАМИ

О. И. Иванищева

Воронежский государственный университет

Аннотация. Стохастическая модель хрупкого разрушения для однородного тела с дефектами структуры предлагалась в [2]. В работе [3] рассматривалась модель стохастической анизотропии, созданной вариантом ориентации дефектов структуры. В данной работе рассматривается оценка статистических характеристик предельной нагрузки для двухкомпонентного неоднородного тела с трещинами. Последние случайным образом ориентированы в объеме и имеют разброс длин. Получены оценки наиболее вероятной предельной нагрузки, ее математического ожидания и дисперсии. Использован вариант макрохарактеристики зернистого композита, полученный по теории смесей. Модель с заданным количеством дефектов использует критерий разрушения для одной трещины [1] и теорию наиболее слабого элемента.

Ключевые слова: предельная нагрузка, статистические характеристики, критерий разрушения, зернистый бикомпозит, стохастическая модель, макрохарактеристика.

Введение

Будем рассматривать микронеоднородную сплошную среду зернистой структуры, представленную двумя компонентами с коэффициентами сопротивления зарождению или развитию трещин A_1 , A_2 и соответствующими концентрациями c и $1 - c$. В этом материале рассеяны трещины таким образом, что материал можно рассматривать как ансамбль связанных сплошным образом элементарных объемов, каждый из которых содержит только одну трещину. При этом все двухкомпонентные элементарные объемы имеют такие концентрации компонентов, как материал в целом. Рассматриваемая стохастическая модель предполагает, случайный разброс длин трещин и углов ориентации относительно базовой системы координат [2], а также учитывает свойства компонентов бикомпозита и их концентрации.

Рассмотрим вариант модели разрушения для конкретного вида нагружения и законов распределения случайных параметров, оценив зависимость статистических характеристик предельной нагрузки от параметров рассматриваемой модели и считая, что трещины не взаимодействуют между собой.

1. Постановка задачи

Пусть тело в виде пластины из такого материала находится под действием двухосного растяжения в двух взаимно-перпендикулярных направлениях однородными усилиями σ_x и $\sigma_y = \sigma_x \cdot \xi$.

Характеристику сопротивления бикомпозита зарождению или развитию трещин примем в макроскопической форме как функцию характеристик компонентов и их концентрации

$$A = A(A_1, A_2, c). \quad (1)$$

Будем считать, что прямолинейные дефекты в материале пластины равномерно рассеяны и их геометрические параметры характеризуются случайной длиной $2s$ и случайным углом ориентации α по отношению к направлению усилий σ_y .

Законы распределения случайных параметров примем в виде

$$\omega_1(\alpha) = \pi^{-1}, \quad \alpha \in (0; \pi/2), \quad \omega_2(s) = (d - d_0)^{-1}, \quad s \in (d_0; d). \quad (2)$$

Рассмотрим вариант открытых трещин и примем предельную нагрузку σ_x для элемента с одной трещиной в виде [1]

$$\sigma_x(\alpha, s, \xi) = \frac{A(A_1, A_2, c)}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi(\alpha, \xi)}}, \quad \varphi(\alpha, \xi) = 1 - \cos^2 \alpha \cdot (1 - \xi). \quad (3)$$

Поскольку величины α и s являются случайными, то предельное значение σ нагрузки σ_x для элемента пластины с одним дефектом также случайная величина, изменяющаяся от σ_{\min} до σ_{\max} . Для двухосного растяжения выполняются условия

$$0 < \xi \leq 1, \quad \sigma \in \left[\frac{A(A_1, A_2, c)}{\sqrt{d}}; \frac{A(A_1, A_2, c)}{\xi \sqrt{d_0}} \right]. \quad (4)$$

Будем считать, что случайные величины α и s независимы, тогда

$$\omega(\alpha, s) = \omega_1(\alpha) \cdot \omega_2(s).$$

Требуется найти оценку математических ожиданий $\langle \sigma_x \rangle$ и $\langle \sigma_y \rangle = \xi \cdot \langle \sigma_x \rangle$. Функция распределения предельной нагрузки для элемента объема с одной трещиной в этих предположениях примет вид

$$F_\sigma(\sigma, \xi) = \int_{G_\alpha} \int_{G_s} \omega_1(\alpha) \cdot \omega_2(s) \cdot ds \cdot d\alpha. \quad (5)$$

Здесь G_α и G_s — области интегрирования по переменным α и s , которые определяются условиями (3), (4).

Интегрирование (5) по области

$$G_s: \quad \frac{A(A_1, A_2, c)^2}{\sigma^2 \cdot \varphi(\alpha, \xi)} \leq s \leq d$$

дает

$$F_\sigma(\sigma, \xi) = \int_{G_\alpha} \frac{1}{\pi} \left(1 - F_2 \left(\frac{A^2(A_1, A_2, c)}{\sigma^2 \cdot \varphi(\alpha, \xi)} \right) \right) d\alpha, \quad (6)$$

где

$$F_2(s) = \int_d^s \omega_2(v) \cdot dv.$$

функция распределения длин трещин, а область интегрирования по переменной α определяется неравенствами

$$G_\alpha: \quad d_0 \leq \frac{A^2(A_1, A_2, c)}{\sigma^2 \cdot \varphi(\alpha, \xi)} \leq d. \quad (7)$$

Если положить $d_0 = 0$, то (7) приобретает явный вид

$$\alpha \in \left[\arccos \sqrt{\frac{d \cdot \sigma^2 - A^2}{d \cdot \sigma^2 \cdot (1 - \xi^2)}}; \frac{\pi}{2} \right]. \quad (8)$$

Из (6) с учетом (8) следует

$$F_\sigma(\sigma, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\arccos \sqrt{\frac{d \cdot \sigma^2 - A(A_1, A_2, c)^2}{d \cdot \sigma^2 \cdot (1 - \xi^2)}}}^{\pi/2} \left(1 - \frac{A(A_1, A_2, c)^2}{\sigma^2 \cdot d \cdot \varphi(\alpha, \xi)} \right) \cdot d\alpha.$$

Использование схемы наименее прочного элемента дает следующее выражение для функции распределения предельной нагрузки в случае наличия системы n трещин

$$F_n(u, \xi) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{\arccos \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2(1-\xi^2)}}}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{u^2 \cdot \varphi(\alpha, \xi)} \right) \cdot d\alpha \right)^n. \quad (9)$$

Здесь

$$u(A_1, A_2, c) = \frac{\sigma \sqrt{d}}{A(A_1, A_2, c)}. \quad (10)$$

При фиксированных ξ, A_1, A_2, c и

$$\sigma = \frac{u \cdot A(A_1, A_2, c)}{\sqrt{d}}$$

(9) определяет вероятность разрушения пластины при напряжениях $\sigma_x = \sigma$ и $\sigma_y = \sigma \cdot \xi$.

2. Алгоритм построения оценки $\langle \sigma \rangle$

Располагая (9) и (10), можно построить плотность распределения предельной нагрузки для рассматриваемой модели разрушения. Для этого продифференцируем (9) по переменной u , учитывая, что эта переменная входит в предел интегрирования, и считаем выполненными условия дифференцирования по u под знаком интеграла как по параметру.

Закон распределения предельной нагрузки в таком случае принимает вид

$$\omega_n(u, \xi) = \frac{n}{\pi^{n-2}} \left(\pi - \int_{\arccos \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2(1-\xi^2)}}}^{\pi/2} \left(\frac{u^2 \varphi(\alpha, \xi) - 1}{u^2 \varphi(\alpha, \xi)} \right) \cdot d\alpha \right)^{n-1} \int_{\arccos \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2(1-\xi^2)}}}^{\pi/2} \frac{2}{u^2 \varphi(\alpha, \xi)} d\alpha. \quad (11)$$

Проведя интегрирование в (11), получим

$$\omega_n(u, \xi, n) = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{u^2-1}{u^2(1-\xi^2)}} + \frac{1}{2u^2 \sqrt{\xi}} - \frac{\phi(u, \xi)}{2\pi} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{u^2 \sqrt{\xi}} - \frac{2\phi(u, \xi)}{\xi} \right), \quad (12)$$

$$\phi(u, \xi) = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u^2 \xi^2}{\xi \cdot (u^2-1)}}}{u^2}, \quad 1 < u \leq \frac{1}{\xi}.$$

Так как $u = u(A_1, A_2, c)$, то плотность распределения (12) зависит от параметра нагрузки ξ , характеристик состава композита A_1, A_2, c и с учетом (10), величины растягивающих напряжений σ , то $\omega_n = \omega_n(\sigma, \xi, n, A_1, A_2, c)$.

Располагая (12), математическое ожидание предельного напряжения σ можно представить в виде

$$\langle \sigma(\xi, A_1, A_2, c, n) \rangle = \frac{A(A_1, A_2, c)}{\xi \sqrt{d}} \int \sigma \omega_n(\sigma, \xi, n, A_1, A_2, c) d\sigma. \quad (13)$$

Дисперсия предельной величины σ определится очевидным образом

$$D_{\sigma}(\xi, A_1, A_2, c) = \int_{\frac{A(A_1, A_2, c)}{\sqrt{d}}}^{\frac{A(A_1, A_2, c)}{\xi\sqrt{d}}} (\sigma_1 - \langle \sigma(\xi, n, A_1, A_2, c, n) \rangle)^2 \omega_n(\sigma_1, \xi, n, A_1, A_2, c) d\sigma_1. \quad (14)$$

Для приближенной оценки $\langle \sigma_x \rangle$ можно воспользоваться методом статистического моделирования по аналогии с [3]. Для этого рассмотрим случайную величину β , которая распределена на

$$\beta \in \left(\frac{A}{\sqrt{d}}; \frac{A}{\xi\sqrt{d}} \right)$$

с функцией распределения

$$F_{\beta}(\beta) = \frac{\xi \cdot \sqrt{d}}{A \cdot (1 - \xi)} \left(\beta - \frac{A}{\sqrt{d}} \right). \quad (15)$$

Очевидно, что соответствующая плотность распределения имеет вид

$$\omega_{\beta}(\beta) = \frac{\xi\sqrt{d}}{A(1-\xi)} \quad (16)$$

и удовлетворяет условию нормировки. Если правую часть (13) умножить и разделить на

$$\frac{A}{\xi\sqrt{d}} - \frac{A}{\sqrt{d}} = \frac{A}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right),$$

то (13) можно рассматривать как математическое ожидание произведения

$$z = \frac{A}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \beta \omega_n(\beta, \xi, n, A_1, A_2, c).$$

То есть

$$\langle \sigma(\xi, A_1, A_2, c, n) \rangle = \frac{A}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \int_{\frac{A(A_1, A_2, c)}{\sqrt{d}}}^{\frac{A(A_1, A_2, c)}{\xi\sqrt{d}}} z(\beta) \omega_{\beta}(\beta) d\beta. \quad (17)$$

Если $\beta_i, i \in \{1, \dots, N\}$ — независимые реализации случайной величины β и

$$z_i = \frac{A}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \beta_i \omega_n(\beta_i, \xi, n, A_1, A_2, c),$$

то оценкой интеграла (13) служит величина [4]

$$\Theta_N = \frac{A}{\sqrt{d}} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) (1/N) \sum_{i=1}^N z_i. \quad (18)$$

Так как интеграл (17) сходится абсолютно, то Θ_N сходится по вероятности к $\langle \sigma(\xi, A_1, A_2, c) \rangle$ при $N \rightarrow \infty$.

С учетом (18) оценки для $\langle \sigma_x \rangle$ и $\langle \sigma_y \rangle$ принимают вид

$$\langle \sigma_x(\xi, A_1, A_2, c, n) \rangle \approx \frac{A}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot \omega_n(\beta_i, \xi, n, A_1, A_2, c) \quad (19)$$

$$\langle \sigma_y(\xi, A_1, A_2, c, n) \rangle \approx \xi \cdot \frac{A}{\sqrt{d}} \cdot \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot \omega_n(\beta_i, \xi, n, A_1, A_2, c).$$

Оценки (19) являются несмещенными и состоятельными и для их реализации нужно получить N возможных значений случайной величины β с плотностью распределения (16). Если воспользоваться методом обратных функций, то из (15) следует

$$\frac{\xi\sqrt{d}}{A(1-\xi)}\left(\beta_i - \frac{A}{\sqrt{d}}\right) = \gamma_i, \quad (20)$$

где γ — базовый датчик или стандартная случайная величина, распределенная равномерно на $(0,1)$. Из (20) получаем явный вид генерирующей формулы для β

$$\beta_i = \frac{A}{\sqrt{d}}\left(1 + \gamma_i \frac{1-\xi}{\xi}\right). \quad (21)$$

С учетом (12) и (21) оценка (19) сводится к суммированию значений произведения $\beta_i \cdot \omega_n(\beta_i, \xi, n, A_1, A_2, c)$ при каждом значении γ .

Если макроскопическую характеристику сопротивления бикомпозита зарождению или развитию трещин выбрать по теории смесей

$$A(A_1, A_2, c) = A_1c + A_2(1-c), \quad (22)$$

то (19) с учетом (21) определяет математическое ожидание предельной нагрузки для пластины из двухкомпонентного упругого материала с рассеянной системой трещин в условиях однородного двухосного нагружения.

Заключение

Полученная оценка сформулирована в предположении равномерного распределения случайных параметров модели. Она описывает зависимость статистического среднего предельной нагрузки от прочностных свойств компонентов композита A_1, A_2 , и их концентрации c , $(1-c)$, а также от параметра нагрузки ξ , от количества дефектов n в материале и статистической характеристики случайного геометрического параметра дефектности d .

Алгоритм расчета рассмотренной оценки представлен с помощью (19), (21) и (22). Построение оценки дисперсии предельной нагрузки производится аналогично при использовании (14), (21), (22).

Литература

1. Черепанов Г. П. Механика разрушения / Г. П. Черепанов, Л. В. Ершов. – М. : Машиностроение, 1977. – 224 с.
2. Витвицкий П. М. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел / П. М. Витвицкий, С. Ю. Попина. – Киев : Наукова думка, 1980. – 187 с.
3. Иванищева О. И. Задача разрушения в условиях стохастической анизотропии и микро неоднородности материала / О. И. Иванищева // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Чебоксары : Чувашский государственный педагогический университет, 2014. – Ч.1. – С. 174–175.
4. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболев. – М. : Наука, 1973. – 312 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ШАРА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛАТФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ENGEE

А. В. Ковалев, Д. А. Чернышов, Д.А. Никулин

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе проведено численное и аналитическое исследование задачи Ламе для толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления. Численный подход реализован методом конечных элементов с использованием вычислительной платформы *Engee*. Полученные распределения радиальных и касательных напряжений сопоставлены с аналитическим решением, что позволило оценить точность примененного метода. Работа направлена на формирование практических навыков моделирования задач линейной упругости в рамках курса механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: метод конечных элементов, задача Ламе, сферическая оболочка, упругая среда, платформа *Engee*.

Введение

Исследование напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций является одной из центральных задач механики деформируемого твёрдого тела. Особую важность представляет анализ объектов, работающих под действием внутреннего и внешнего давления. К таким объектам относятся сферические оболочки, применяемые в гидравлических системах, энергетическом оборудовании и элементах высоконагруженных инженерных конструкций. Надёжность подобных систем напрямую зависит от точности определения напряжений и перемещений.

Аналитическое решение классической задачи Ламе позволяет получить распределение радиальных и окружных напряжений в толстостенной сферической оболочке при всестороннем нагружении. Однако в инженерной практике расчёт нередко осложняется геометрическими особенностями, необходимостью учёта неоднородностей или использованием сложных моделей материалов. В таких условиях становится актуальным применение численных методов, прежде всего, метода конечных элементов (МКЭ), который предоставляет универсальный инструмент решения задач упругости в широком классе постановок.

Современные вычислительные платформы, такие как *Engee* [1], позволяют совмещать символьные и численные методы, облегчая построение моделей и визуализацию результатов. Это делает МКЭ удобным средством как для исследовательских, так и для учебных задач.

Цель данной работы — реализовать конечно-элементную модель толстостенной сферической оболочки, решить задачу Ламе МКЭ на платформе *Engee* и сравнить результат с аналитическим решением.

Постановка задачи

Рассматривается полая сферическая оболочка с внутренним радиусом a и внешним радиусом b , изготовленная из однородного изотропного линейно-упругого материала. Оболочка испытывает равномерно распределённое внутреннее давление q_a на поверхности $r = a$ и внешнее давление q_b на поверхности $r = b$. Отсутствуют массовые и центробежные силы. При сферической геометрии и равномерных давлениях решение задачи обладает сферической

симметрией, т. е. все поля зависят только от радиальной координаты r . Предполагается, что деформации малы, а материал ведёт себя изотропно и линейно-упруго.

Аналитическое решение задачи Ламе

Под сферической симметрией ненулевыми остаются только радиальные и касательные нормальные напряжения $\sigma_r(r)$ и $\sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi(r)$. Аналитический вывод соответствующих формул традиционно основан на решениях для обладающих сферической симметрией упругих тел, подробно рассматривался в [2]. В результате получаются классические выражения для напряжений в оболочке. При внутреннем давлении q_a и внешнем q_b формулы можно записать так:

$$u(r) = \frac{q_b b^3 - q_a a^3}{(3\lambda + 2\mu)(a^3 - b^3)} r + \frac{(q_a - q_b) a^3 b^3}{4\mu(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_r = q_a \frac{a^3(r^3 - b^3)}{r^3(b^3 - a^3)} + q_b \frac{b^3(a^3 - r^3)}{r^3(b^3 - a^3)},$$

$$\sigma_\theta = q_a \frac{a^3(2r^3 + b^3)}{2(b^3 - a^3)r^3} - q_b \frac{b^3(2r^3 + a^3)}{2(b^3 - a^3)r^3}.$$

Эти выражения полностью определяют распределение перемещений и нормальных напряжений по толщине сферической оболочки.

Решение методом конечных элементов

Для корректного применения МКЭ необходимо учитывать, что выбор аппроксимирующих функций напрямую связан с выбранной вариационной постановкой. При кинематическом и статическом подходах используются различные классы функций, от которых зависит точность получаемого решения и корректность выполнения условий совместности и равновесия [3, 4]. Подробные примеры применения обоих подходов приводятся в соответствующих учебных материалах, где даются рекомендации по построению приближённых моделей и анализу их устойчивости.

В данной работе для численного описания напряжённо-деформированного состояния толстостенного шара применяется одномерная конечно-элементная схема, адаптированная к сферически-симметричной постановке. Переход к локальной координате осуществляется по стандартному линейному отображению:

$$u = \frac{2r - (r_i + r_{i+1})}{\Delta r}.$$

Обратное преобразование для определения радиальной координаты в зависимости от локальной координаты:

$$r(u) = \frac{u\Delta r + r_i + r_{i+1}}{2},$$

где Δr — расстояние между узлами конечного элемента по радиальной координате:

$$\Delta r = r_{i+1} - r_i.$$

Аппроксимирующие полиномы могут быть классифицированы в соответствии с областью решения задачи [5, 6]. В рамках данной работы используется линейный вид:

$$\{u\}^e = [\mathbf{N}]^e \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^e.$$

где $[\mathbf{N}]^e = [N_1(u) \quad N_2(u)]$ — матрица функций формы; N_1 и N_2 — функции формы, определяемые соотношениями:

$$N_1(u) = \frac{1-u}{2}, \quad N_2(u) = \frac{1+u}{2}.$$

В случае сферической симметрии деформации записываются через радиальное перемещение:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\varphi \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{Bmatrix}^e \{u\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{Bmatrix}^e [\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{2}{u\Delta r + (r_i + r_{i+1})} \\ \frac{2}{u\Delta r + (r_i + r_{i+1})} \end{Bmatrix} [\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e = [\mathbf{D}]^e [\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e,$$

где матрица деформаций $[\mathbf{D}]^e$ имеет следующий вид:

$$[\mathbf{D}]^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{2}{u\Delta r + (r_i + r_{i+1})} \\ \frac{2}{u\Delta r + (r_i + r_{i+1})} \end{Bmatrix}$$

Для изотропного материала напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^e = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e,$$

где \mathbf{C} — матрица упругих констант:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражение деформации, получаем:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^e = [\mathbf{C}][\mathbf{D}]^e[\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e.$$

Запишем уравнение полной потенциальной энергии:

$$\Pi = W - A,$$

где W — потенциальная энергия деформации, A — работа поверхностных сил.

Потенциальная энергия деформации принимается в стандартном виде:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^{eT} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e dV^e = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} [\mathbf{N}]^{eT} [\mathbf{D}]^{eT} [\mathbf{C}]^e [\mathbf{D}]^e [\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e dV^e = \\ &= \frac{1}{2} \sum_e \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} \int_{V^e} [\mathbf{N}]^{eT} [\mathbf{D}]^{eT} [\mathbf{C}]^e [\mathbf{D}]^e [\mathbf{N}]^e dV^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} [\mathbf{K}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\delta}\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\delta}\}, \end{aligned}$$

где V — полный объём тела, V^e — объём элемента e , $[\mathbf{K}]$ — матрица жесткости системы; $[\mathbf{K}]^e$ — матрица жёсткости элемента, принимающая в сферических координатах следующую форму:

$$[\mathbf{K}]^e = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} [\mathbf{N}]^{eT} [\mathbf{D}]^{eT} [\mathbf{C}]^e [\mathbf{D}]^e [\mathbf{N}]^e r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Работа поверхностных сил записывается определяется соотношением:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\tilde{A}^e} \{u\}^{eT} \{p\}^e d\Gamma = \sum_e \int_{\tilde{A}^e} \{\delta\}^{eT} [\mathbf{N}]^{eT} \{p\}^e d\Gamma^e = \\
&= \sum_e \{\delta\}^{eT} \int_{\tilde{A}^e} [\mathbf{N}]^{eT} \{p\}^e d\Gamma^e = \sum_e \{\delta\}^{eT} \{P\}^e = \{\delta\}^T \{P\},
\end{aligned}$$

где Γ — поверхность тела с заданными нагрузками, Γ^e — часть поверхности, относящаяся к элементу e , $\{P\}$ — вектор узловых сил системы $\{P\}^e$ — вектор узловых сил элемента:

$$\{P\}^e = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\mathbf{N}]^{eT} \{p\}^e r^2 \cos \varphi d\theta d\varphi.$$

На внутренней $r = a$ и внешнее $r = b$ поверхностях шара заданы давления q_a , q_b соответственно, тогда вектор узловых сил имеет вид:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 4\pi a^2 q_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4\pi b^2 q_b \end{bmatrix}.$$

Из вариационного принципа Лагранжа следует выражение:

$$\delta\Pi = \delta \left(\frac{1}{2} \{\delta\}^T [\mathbf{K}] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{P\} \right) = [\mathbf{K}] \{\delta\} - \{P\} = 0,$$

откуда получаем матричное уравнение:

$$[\mathbf{K}] \{\delta\} = \{P\}.$$

Его решение относительно узловых параметров с их последующей подстановкой в соответствующие выражения позволяет получить значения перемещений и напряжений в узлах элементов.

Пример реализации на платформе Engage

Численный алгоритм реализован в программной среде *Engage*. На рис. 1 представлено основное рабочее окно среды, включающее консоль выполнения и панель переменных.

Решение проводилось со следующими параметрами: внутренний радиус $a = 1$ м, внешний радиус $b = 1.5$ м, внутреннее давление $q_a = 100$ МПа, внешнее давление $q_b = 200$ МПа, модуль Юнга $E = 21000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Расчет выполнялся при количестве точек дискретизации по толщине $n = 100$. Ниже приведён фрагмент кода, используемый для решения задачи Ламе для толстостенного шара.

```

using LinearAlgebra
using Symbolics
using NumericalIntegration
using Plots
using Symbolics: solve_for
@variables u, r, r1, r2
Du = Differential(u)
ED(x)=expand_derivatives(x)
# Параметры материала и геометрии
a = 1.0
b = 1.5

```

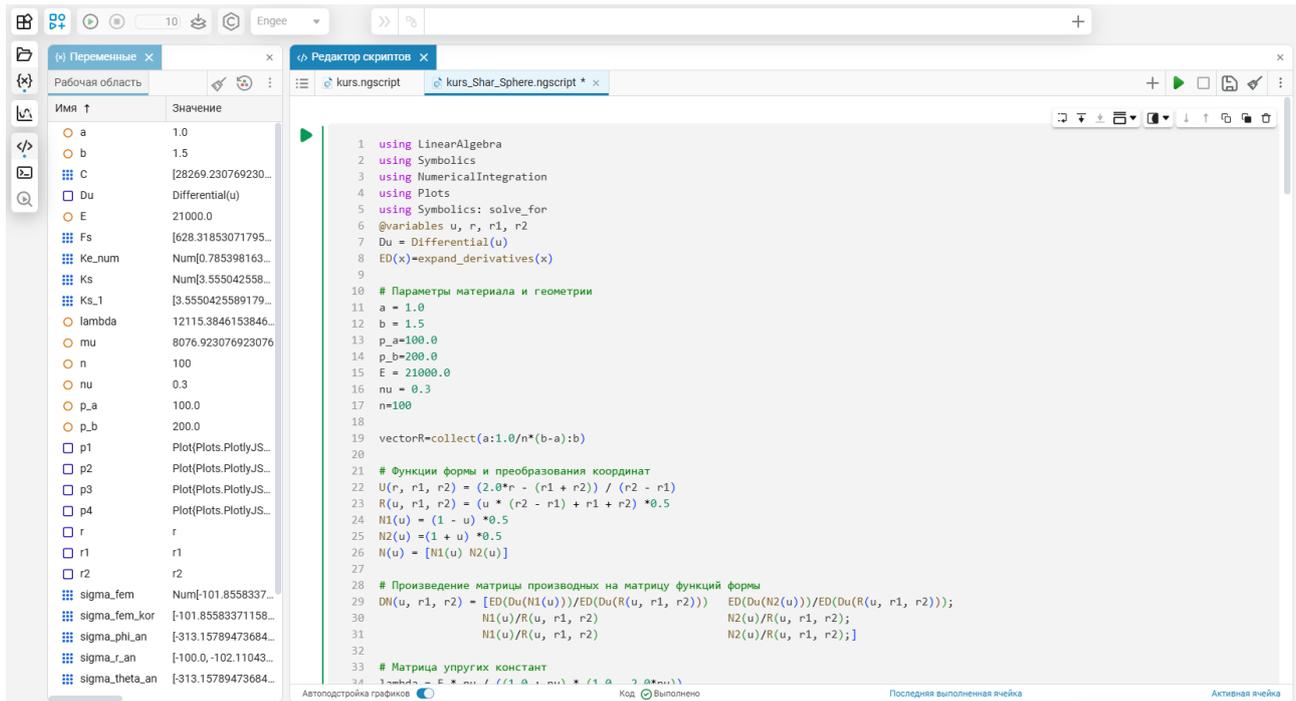


Рис. 1. Интерфейс программной среды Engage

```
p_a=100.0
p_b=200.0
E = 21000.0
nu = 0.3
n=100
```

```
vectorR=collect(a:1.0/n*(b-a):b)
# Функции формы и преобразования координат
U(r, r1, r2) = (2.0*r - (r1 + r2)) / (r2 - r1)
R(u, r1, r2) = (u * (r2 - r1) + r1 + r2) *0.5
N1(u) = (1 - u) *0.5
N2(u) =(1 + u) *0.5
N(u) = [N1(u) N2(u)]
# Произведение матрицы производных на матрицу функций формы
DN(u, r1, r2) = [ED(Du(N1(u)))/ED(Du(R(u, r1, r2))) ED(Du(N2(u)))/ED(Du(R(u,
r1, r2)))]
                N1(u)/R(u, r1, r2)                N2(u)/R(u, r1, r2);
                N1(u)/R(u, r1, r2)                N2(u)/R(u, r1, r2);]
# Матрица упругих констант
lambda = E * nu / ((1.0 + nu) * (1.0 - 2.0*nu))
mu = E / (2.0 * (1.0 + nu))
C = [lambda + 2*mu    lambda    lambda;
     lambda    lambda + 2*mu    lambda;
     lambda    lambda    lambda + 2*mu]
k(u, r1, r2)= DN.(u, r1, r2)' * C * DN.(u, r1, r2)
# Точки и веса квадратуры Гаусса
u_vals = [-1/sqrt(3.0), 1/sqrt(3.0)]
w_vals = [1.0, 1.0]
# Численное интегрирование матрицы жесткости элемента
Ke_num = zeros(2, 2)
```

```

for k in 1:2
    u_k = u_vals[k]
    w_k = w_vals[k]
    D_N = substitute.(DN(u, r1, r2),[u=>u_k])
    rk = R(u_k, r1, r2)
    dr_du = substitute(ED(Du(R(u, r1, r2))),[u=>u_k])
    factor_io = 2 * π * rk^2 * dr_du * w_k
    Ke_num += (D_N' * C * D_N) * factor_io
end

# Нахождение "глобальной" матрицы
Ke(r1, r2)=Ke_num
Ks=Num.(zeros(n+1,n+1))

for i in 1:n
    Ke_loc=(substitute.(Ke(r1, r2),(Dict(r1=>vectorR[i], r2=>vectorR[i+1])),))
    for j in 0:1
        for k in 0:1
            Ks[i+j,i+k]=Ks[i+j,i+k]+Ke_loc[j+1,k+1]
        end
    end
end

# Глобальный вектор нагрузки Fs
Fs =(zeros(n+1))

# Только первый и последний элементы ненулевые
Fs[1] = 2.0 * π * a^2 * p_a
Fs[end] = -2.0 * π*b^2 * p_b

# Превращаем Symbolics.Num в Float64
Ks_1 = [eval(Symbolics.toexpr(ui)) for ui in Ks]

# Вектор перемещений
U_sym = inv(Ks_1) * Fs

# Аналитическое решение
function u_analytical(r)
    term1=((p_b*b^3 - p_a*a^3) / ((3lambda + 2mu)*(a^3 - b^3))) * r
    term2=((p_a - p_b)*a^3*b^3) / (4*mu*(b^3 - a^3)) * (1/r^2)
    return term1 + term2
end

u_an = [u_analytical(r) for r in vectorR]

# Вычисление напряжений
sigma_fem = Num.(zeros(n+1,3))

for i in 1:n
    r1_val = vectorR[i]
    r2_val = vectorR[i+1]

    # Вектор перемещений элемента
    d_element = [U_sym[i];
                 U_sym[i+1]]

    sigma_loc(r)=substitute.(substitute.(C*DN(u,r1,r2)*d_element,(Dict(u=>U(r,r1,
r2))),),(Dict(r1=>vectorR[i], r2=>vectorR[i+1])),)

```

```

for j in 1:3
  for k in 0:1
    sigma_fem[i+k,j]+=(substitute.(sigma_loc(r),(Dict(r=>vectorR[i
+k]),,))) [j]
  end
end
end
end
for i in 2:n
  for j in 1:3
    sigma_fem[i,j]*=0.5
  end
end
end
# Напряжения
sigma_fem_kor = [eval(Symbolics.toexpr(ui)) for ui in sigma_fem]

```

Сравнение аналитического решения и МКЭ

На рис. 2–4 представлены распределения радиальных перемещений и компонент тензора напряжений по толщине стенки сферы.

Анализ результатов показывает достаточную сходимость численного и аналитического решений. Радиальные перемещения, полученные МКЭ, точно следуют аналитической кривой по всему диапазону радиусов. Полученные результаты подтверждают корректность реализации МКЭ для сферически симметричной задачи.

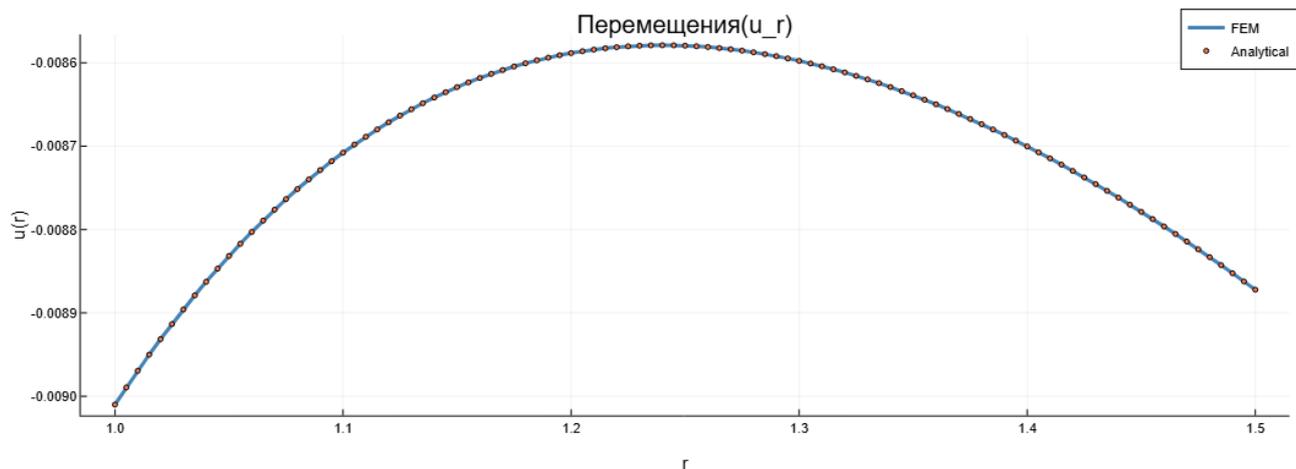


Рис. 2. Сравнение численного и аналитического перемещения u_r

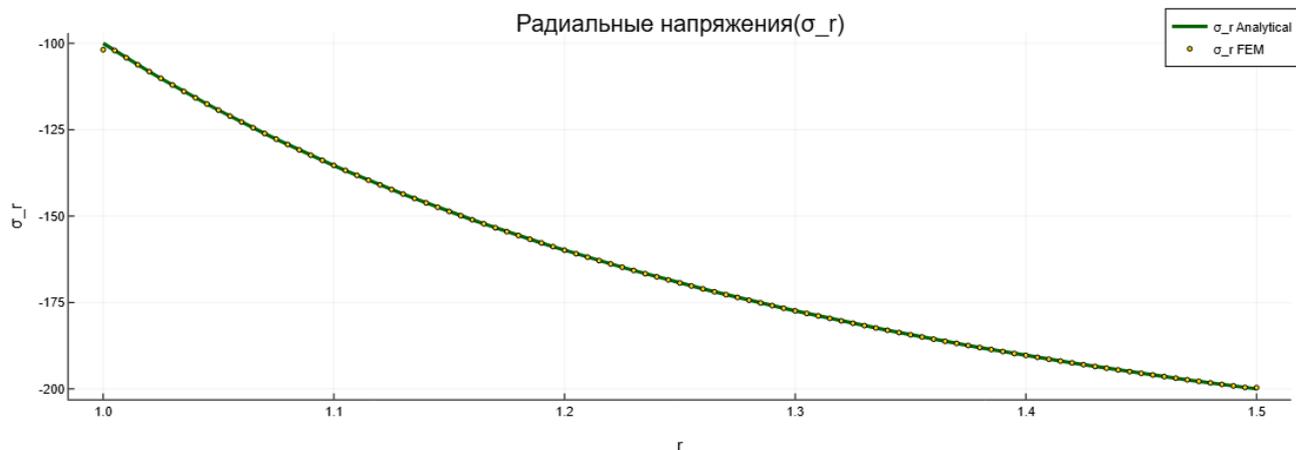


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического напряжения σ_r

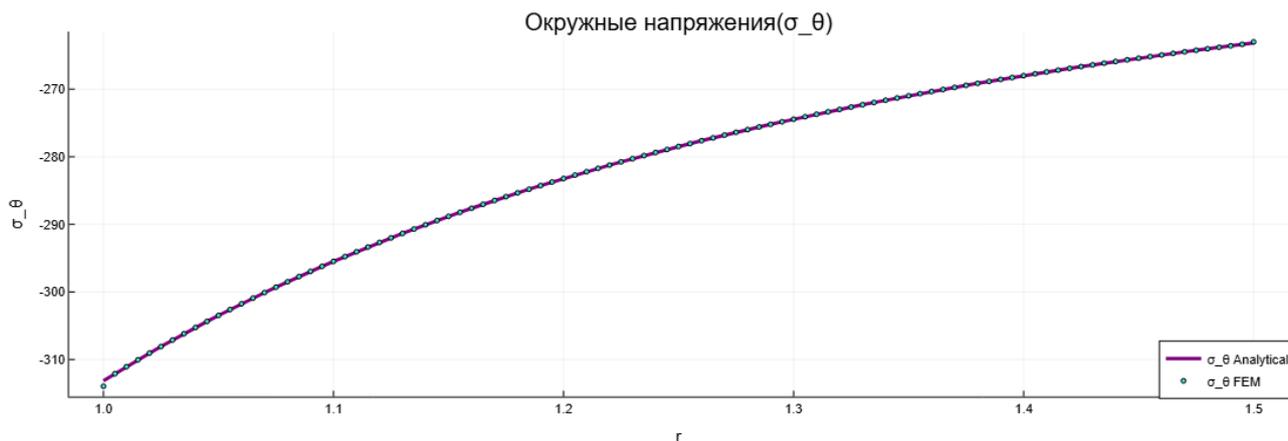


Рис. 4. Сравнение численного и аналитического напряжения σ_{θ}

Заключение

В работе выполнено аналитическое и численное решение задачи Ламе для толстостенного сферического слоя под внутренним и внешним давлением. Численные результаты, полученные методом конечных элементов в среде *Engge*, хорошо согласуются с аналитическими формулами, что подтверждает корректность реализованной модели.

Платформа *Engge* удобна для подобных расчётов: она позволяет работать с символьными выражениями, контролировать каждый этап вычислений и быстро строить графики результатов. Среди преимуществ можно отметить прозрачность алгоритмов, гибкость настройки, возможность работать онлайн с любого устройства и простоту верификации. Однако есть и ограничения: отсутствует встроенное символьное интегрирование, а при больших объёмах кода платформа может вести себя нестабильно. Эти особенности требуют более детальной ручной работы со стороны пользователя.

В целом *Engge* показала себя пригодной для учебных и исследовательских расчётов по линейной упругости, а полученные результаты демонстрируют достаточную точность и надёжность для задач такого класса.

Литература

1. Engge [Электронный ресурс] — URL: <https://start.engge.com/> (дата обращения: 27.11.2025).
2. Гоцев Д. В. Устойчивость равновесия горных выработок в реологически сложных массивах с пористой структурой : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.04 / Д. В. Гоцев. – Воронеж, 2010. – 35 с.
3. Радин В. П. Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов : учебное пособие : [16+] / В. П. Радин, Ю. Н. Самогин, В. П. Чирков. – Москва : Физматлит, 2013. – 314 с.
4. Присекин В. Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел : учебник / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев. – Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. – 240 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБАЕМЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОЛЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПОЛУБЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

А. В. Конов, В. А. Козлов

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Предлагается подход к определению напряженно-деформированного состояния тонкостенных пролетных конструкций под действием изгибающих нагрузок. На основании полубезмоментной теории оболочек В. З. Власова получены разрешающие уравнения для перемещений и напряжений. Приводится пример расчета оболочки по предложенной методике и выносятся результаты расчета в виде эпюр напряжений.

Ключевые слова: полубезмоментная теория оболочек, тонкостенные конструкции, дельта-функция Дирака, функция Хевисайда, депланация.

Введение

Конструкции, состоящие из тонкостенных замкнутых призматических оболочек, часто встречаются в мостовых сооружениях (рис. 1). Одним из эффективных подходов для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в таких конструкциях является полубезмоментная теория оболочек. Она позволяет сохранить высокую точность результатов, значительно упрощая вычисления.



Рис. 1. Мостовой пролет в виде призматической оболочки

Но для описания НДС оболочки требуется достаточно точное аналитическое описание действующих нагрузок. В настоящей работе получена и апробирована методика расчета пролетных тонкостенных призматических конструкций под воздействием изгибающих нагрузок.

1. Основные расчетные положения

Расчеты с использованием теории полубезмоментной теории оболочек достаточно подробно рассмотрены в работах [1, 2]. Основные принятые в них гипотезы:

1. Оболочка безмоментная в продольном направлении и моментная в поперечном.
2. По толщине оболочки материал несжимаем.
3. Деформация оболочки происходит таким образом, что нормальный линейный элемент, перпендикулярный к срединной поверхности до деформации, остается линейным и нормальным к срединной поверхности после деформации (гипотеза Кирхгофа — Лява).

При этом рассматриваемые оболочки считаются сравнительно длинными, и наибольшее влияние на НДС в них оказывают нормальные и сдвигающие силы N_1 , N_2 , S и поперечные изгибающие моменты M_2 , с соответствующими им срезающими силами Q_2 . Эти компоненты изображены на рис. 2.

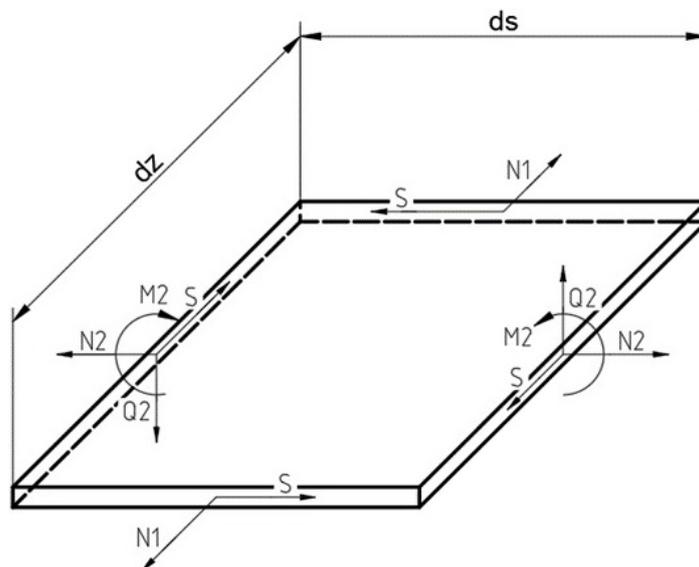


Рис. 2. Компоненты внутренних усилий

2. Основные уравнения полубезмоментной теории

Представим оболочку в виде двумерного тела, таким образом любую точку на поверхности можно описать, используя две координаты: продольная — z и поперечная — s .

Тогда любое перемещение точки можно будет представить как функцию двух переменных. Обозначим продольные перемещения как $u(z, s)$, а поперечные как $v(z, s)$. Их можно представить в виде конечных рядов (1), (2):

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s); \quad (1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s), \quad (2)$$

где $U_i(z)$, $V_k(z)$ — искомые продольные и поперечные перемещения соответственно, зависящие только от продольной координаты z ,

$\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ — задаваемые функции, соответствующие искомым функциям $U_i(z)$, $V_k(z)$ соответственно и зависящие только от поперечной координаты s .

Функции $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ для прямоугольного контура (рис. 3) при условии, что толщины вертикальных поясов и горизонтальных попарно равны, выбираются в виде:

$$\varphi_1(s) = y(s), \quad \varphi_2(s) = \pm \left[\left(\frac{d_2^2}{4} - x^2(s) \right) - cy(s) \right], \quad \varphi_3(s) = x(s)y(s),$$

$$\psi_1(s) = y'(s), \quad \psi_2(s) = h^*(s),$$

где $c = \frac{d_1 d_2^2 F_2}{6J_x}$; $F_2 = d_2 \delta_2$ — площадь одного горизонтального пояса; J_x — момент инерции оболочки относительно оси X ; $h^*(s)$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на соответствующую контурную пластину оболочки.

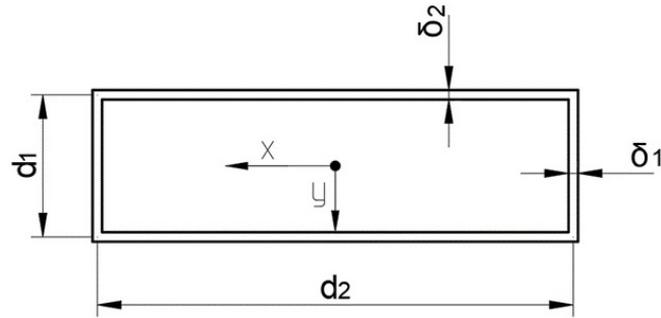


Рис. 3. Поперечное сечение оболочки

Эпюры функций $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ представлены на рис. 4.

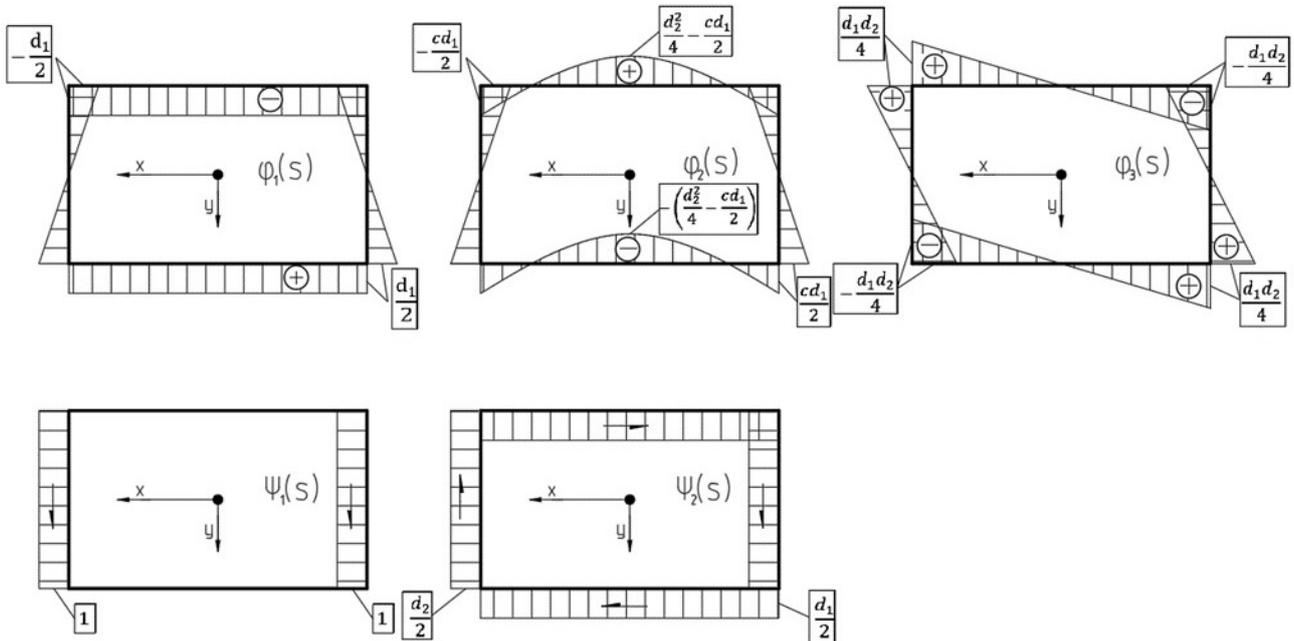


Рис. 4. Эпюры аппроксимирующих функций

3. Вывод разрешающих уравнений

Для выбранных деформационных функций в работах [1,2] получены дифференциальные уравнения изгиба (3) и кручения (4).

$$\begin{aligned}
 EJ_x U_1'' - 2GF_1 U_1 - 2GcF_1 U_2 - 2GF_1 V_1' + p_1 &= 0, \\
 EJ_{1\varphi} U_2'' - 2GcF_1 U_1 - Gb_{22} U_2 - 2GcF_1 V_1' + p_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 2GF_1 U_1' + 2GcF_1 U_2' + 2GF_1 V_1'' + q &= 0, \\
 \alpha U_3'' - b_1 U_3 - b_2 V_2' + p_3 &= 0, \\
 b_2 U_3 + b_1 V_2'' + m &= 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha = EJ_{2\varphi}$, $b_1 = \frac{1}{2}G(d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1)$, $b_2 = \frac{1}{2}G(d_2^2 F_1 - d_1^2 F_2)$, $b_{22} = \frac{2}{3}d_2^2 F_2 + 2c^2 F_1$;

$F_1 = d_1 \delta_1$ — площадь одного вертикального пояса;

E, G — модуль упругости и модуль сдвига соответственно;

$J_{1\varphi}, J_{2\varphi}$ — бимомент инерции при изгибе и кручении соответственно.

Свободные члены в уравнениях (3), (4) являются обобщенными внешними продольными и поперечными погонными силами. Так как в данной работе рассматривается задача только

изгиба, положим равными нулю члены p_i , m . В таком случае решение системы (4), отвечающей крутящему воздействию, не требуется, поскольку крутящая нагрузка отсутствует.

Оставшуюся систему уравнений (3) необходимо решать в зависимости от вида приложенной изгибающей нагрузки $q(z)$. Основные виды воздействий на пролетные конструкции мостовых сооружений — равномерно или неравномерно изгибающие распределенные нагрузки, а также сосредоточенные поперечные силы. Пример распределенной погонной нагрузки — собственный вес конструкции, вес дорожного покрытия; пример сосредоточенных сил — двухосная тележка АК или четырехосная тележка НК [3].

Расчетные схемы для случая распределенной нагрузки и точечного воздействия представлены на рис. 5, 6.

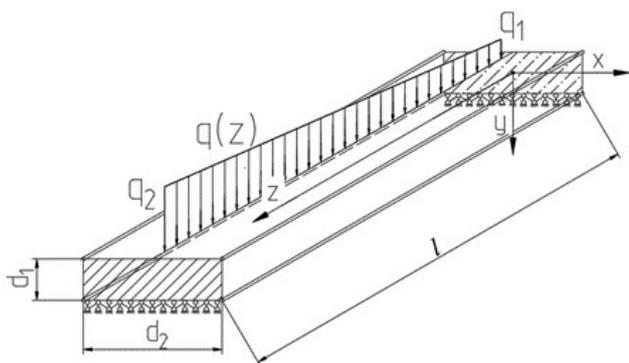


Рис. 5. Расчетная схема оболочки при действии распределенной силы

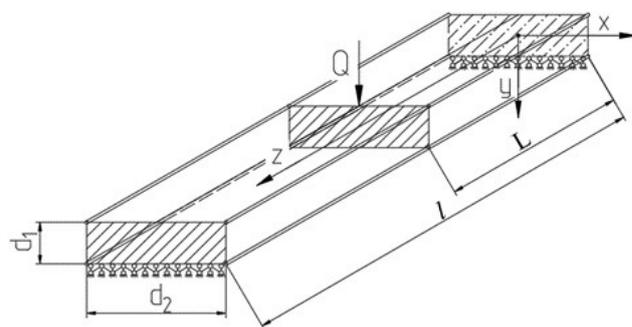


Рис. 6. Расчетная схема оболочки при действии сосредоточенной силы

При действии распределенной нагрузки функция $q(z)$ будет иметь вид:

$$q(z) = q_1 + \frac{(q_2 - q_1)(l - z)}{l}, \quad (5)$$

где q_1, q_2 — значения интенсивности нагрузки в начале и в конце оболочки соответственно.

При точечном воздействии эта функция будет иметь вид:

$$q(z) = Q \cdot \delta(z - L), \quad (6)$$

где Q — значение сосредоточенного воздействия; L — расстояния от начала отсчета до точки приложения; $\delta(z - L)$ — дельта-функция Дирака.

Решая систему (3), получим:

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \frac{c_1 z^2}{2EJ_x} + \frac{c_2 z}{EJ_x} + \frac{c_3}{EJ_x} - \frac{\int \int \int q(z) dz dz dz}{EJ_x}, \\ U_2''(z) - k_{изг}^2 U_2(z) &= \frac{c c_1}{EJ_{1\phi}} - \frac{c}{EJ_{1\phi}} \int q(z) dz, \\ V_1(z) &= -\frac{\int \int q(z) dz dz}{2GF_1} + \frac{c_1 z}{2GF_1} - \int U_1(z) dz - c \int U_2(z) dz + c_4, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k_{изг} = \sqrt{\frac{2d_2^2 F_2}{3\gamma J_{1\phi}}}$ — упругая характеристика при изгибе; $c_1 \dots c_4$ — константы интегрирования.

4. Результаты

Систему уравнений (7) можно решить аналитически для случая распределенной нагрузки:

$$\begin{aligned}
U_1(z) &= \frac{q_2 z^3}{6EJ_x} - \frac{(q_2 - q_1)z^4}{24lEJ_x} + \frac{c_1 z^2}{2EJ_x} + \frac{c_2 z}{EJ_x} + \frac{c_3}{EJ_x}, \\
U_2(z) &= c_4 e^{k_{узз} z} + c_5 e^{-k_{узз} z} - \frac{\tilde{a}_1 c q}{EJ_{1\varphi} k_{узз}^2} - \frac{q}{EJ_{1\varphi} k_{узз}^2} + \frac{q \cdot (q_2 - q_1)^2}{2k_{узз}^2 l EJ_{1\varphi}} + \frac{c \cdot (q_2 - q_1)}{k_{узз}^4 l EJ_{1\varphi}}, \\
V_1(z) &= \frac{1}{2GF_1} \left(\frac{q_2 z^2}{2} - \frac{(q_2 - q_1)z^3}{6l} \right) + \frac{c_1 z}{2GF_1} - \frac{c_1 z^3}{6EJ_x} - \frac{c_2 z^2}{2EJ_x} - \frac{c_3 z}{EJ_x} - \\
&\quad - \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{q_2 z^4}{24} - \frac{(q_2 - q_1)z^5}{120l} \right) - \frac{cc_4 e^{k_{узз} z}}{k_{узз}^2} + \frac{cc_5 e^{-k_{узз} z}}{k_{узз}^2} + \frac{c^2 c_1 z}{k_{узз}^2 EJ_{1\varphi}} + \\
&\quad + \frac{c^2 q_2 z^2}{2k_{узз}^2 EJ_{1\varphi}} - \frac{c^2 \cdot (q_2 - q_1)z^3}{6k_{узз}^2 l EJ_{1\varphi}} - \frac{c^2 \cdot (q_2 - q_1)z}{k_{узз}^4 l EJ_{1\varphi}} + c_6.
\end{aligned} \tag{8}$$

Или численно-аналитически для случая сосредоточенной нагрузки. При задании функции $q(z)$ в виде (6) решение системы (7) получено методом конечных разностей с последующей аппроксимацией полученных значений с помощью регрессионного анализа. В этом случае компоненты U_1 , U_2 , V_1 принимают вид:

$$\begin{aligned}
U_1(z) &= \frac{c_1(z-L)^2}{2EJ_x} + \frac{c_2(z-L)}{EJ_x} + \frac{c_3}{EJ_x} - \frac{Q}{EJ_x} \cdot \frac{(z-L)^2}{2} \cdot \theta(z-L), \\
U_2(z) &= p_1 + \frac{p_2 - p_1}{1 + e^{-p_3(z-L)}}, \\
V_1(z) &= -\frac{Q \cdot (z-L) \cdot \theta(z-L)}{2GF_1} + \frac{c_1 z}{2GF_1} - \frac{c_1 \cdot (z-L)^3}{6EJ_x} - \frac{c_2 \cdot (z-L)^2}{2EJ_x} - \\
&\quad - \frac{c_3 \cdot (z-L)}{EJ_x} + \frac{Q}{EJ_x} \cdot \frac{(z-L)^3}{6} \cdot \theta(z-L) - cp_1 z - \frac{c \cdot (p_2 - p_1)}{p_3} \cdot \ln(e^{p_3 z} + e^{p_3 L}) + c_6,
\end{aligned} \tag{9}$$

где p_1, p_2, p_3 — параметры, подбираемые методом регрессионного анализа.

Определив перемещения, нормальные (σ) и касательные (τ) напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma(z, s) = E(U_1'(z)\varphi_1(s) + U_2'(z)\varphi_2(s) + U_3'(z)\varphi_3(s)), \tag{10}$$

$$\tau(z, s) = G(U_1(z)\varphi_1'(s) + U_2(z)\varphi_2'(s) + U_3(z)\varphi_3'(s) + V_1'(z)\psi_1(s) + V_2'(z)\psi_2(s)). \tag{11}$$

5. Пример расчета

В качестве примера произведем расчеты для каждого типа нагрузок отдельно. Исходные данные приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Исходные данные для расчета при действии сосредоточенной нагрузки

Высота	Ширина	Толщина стенок	Толщина полок	Сосредоточенная нагрузка	Длина пролета	Положение сосред. нагр.	Модуль упругости	Коэфф. Пуассона
d_1	d_1	δ_1	δ_2	Q	l	L	E	μ
м	м	см	см	кН	м	м	ГПа	—
1	2	1	1	100	20	10	210	0,3

Таблица 2

Исходные данные для расчета при действии распределенной нагрузки

Высота	Ширина	Толщина стенок	Толщина полок	Итенсивность в т. $z = 0$	Итенсивность в т. $z = l$	Длина пролета	Модуль упругости	Коэфф. Пуассона
d_1	d_1	δ_1	δ_2	q_1	q_2	l	E	μ
м	м	см	см	кН/м	кН/м	м	ГПа	–
1	2	1	1	10	20	20	210	0,3

Эпюры напряжений по длине представлены на рис. 7, 8. Значений напряжений фиксировались при значениях контурной координаты $s = d_1 + d_2$ (нижняя правая точка сечения) и $s = d_1 + 1.5d_2$ (нижняя средняя точка сечения).

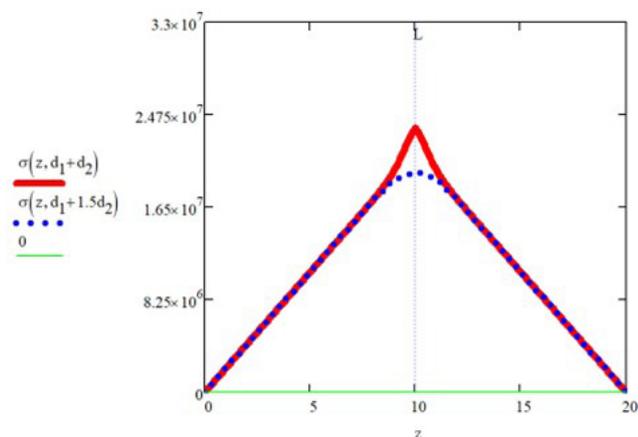


Рис. 7. Эпюры напряжений при действии сосредоточенной нагрузки

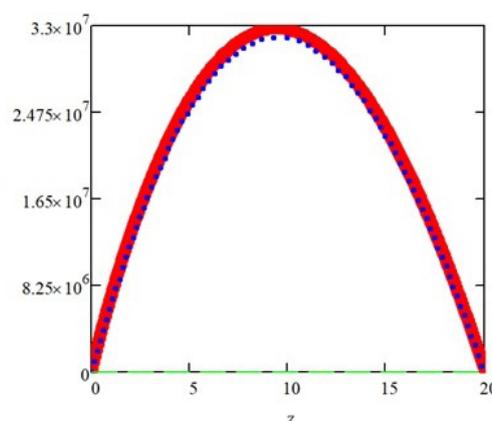


Рис. 8. Эпюры напряжений при действии распределенной нагрузки

Заключение

На основе полубезмоментной теории оболочек предложен подход к построению расчетной модели для определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных пролетных конструкций под действием изгибающих нагрузок. Получены разрешающие уравнения для распределенных и сосредоточенных нагрузок. Предложенная методика, реализованная в среде MathCad, является достаточно универсальной и рекомендуется к применению в инженерной практике для решения прикладных задач.

Литература

1. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. – М. : Машиностроение, 1966. – 392 с.
2. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. – М. : Госстройиздат, 1958. – 502 с.
3. СП 35.13330.2011. Свод правил. Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*. – М. : Минстрой России, 2011. – 350 с.
4. Конов А. В., Козлов В. А., Викулов М. А. Напряженно-деформированное состояние замкнутых призматических тонкостенных систем пролетных конструкций на основе полубезмоментной теории оболочек // Строительная механика и конструкции. – 2025. – № 2(45). – С. 71–81.

5. *Dirac P. A. M. The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics / P. A. M. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1927. – V. 113, No 765. – P. 621–641.*

6. *Очков В. Ф. Mathcad 15 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб. : БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.*

7. *Altenbach J., Kissing W. Statische und dynamische Analyse für prismatische und nichtprismatische Kastenträger // Technische Mechanik – European Journal of Engineering Mechanics. – 2020. – 7(1). – P. 37–41.*

8. *Altenbach H., Altenbach J. and Matzdorf V. Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen // Technische Mechanik – European Journal of Engineering Mechanics. – 2019. – 11(1). – P. 23–35.*

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СРЕДЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ «ENGEЕ» НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Ю. В. Малыгина, Р. М. Землянухин, А. В. Ковалев

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе представлены соотношения для напряжений и перемещений, полученные в ходе решения задачи Ламе для толстостенного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления. Проведено компьютерное моделирование решения данной задачи методом конечных элементов (МКЭ) в среде математических вычислений и динамического моделирования «Engеe». Выполнен сравнительный анализ полученных решений с классическим аналитическим решением.

Ключевые слова: метод конечных элементов, задача Ламе, цилиндрическая симметрия, напряжения, деформации, перемещения, численное моделирование, среда «Engеe».

Введение

В современной инженерной практике актуальной задачей является выбор эффективного метода расчёта напряжённо-деформированного состояния конструктивных элементов. Цель данной работы заключается в сравнении решений, полученных аналитическим методом и методом конечных элементов, реализованным в отечественной среде математических вычислений и динамического моделирования «Engеe» [1], для задачи Ламе о толстостенном цилиндре [2, 3].

1. Постановка задачи

1.1. Объект исследования

Рассмотрим толстостенное цилиндрическое тело, находящееся под действием сжимающих нагрузок интенсивностями q_a и q_b , равномерно распределённых по внутренней и внешней поверхностям. Материал цилиндра считается изотропным, упругим и однородным. Имеет место осевая симметрия в цилиндрической системе координат (r, θ, z) .

1.2. Аналитическое решение задачи Ламе

Согласно постановке задачи напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты [4]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r(r), \sigma_\theta = \sigma_\theta(r), \sigma_z = \sigma_z(r), \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_r(r), \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r), \varepsilon_z = 0, \\ u &= u(r),\end{aligned}$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ — компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ — компоненты тензора деформаций, u — радиальная составляющая вектора перемещений.

Полная система уравнений имеет вид:

– уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$$

– закон Гука

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta,$$

$$\sigma_\theta = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\theta,$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$

– или в перемещениях

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dr} + \lambda\frac{u}{r},$$

$$\sigma_\theta = \lambda\frac{du}{dr} + (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r},$$

$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right),$$

– граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad (q_a > 0, q_b > 0).$$

Аналитическое решение этой задачи имеет вид [1, 2]:

$$u = \frac{q_b b^2 - q_a a^2}{2(\lambda + \mu)(a^2 - b^2)} \cdot r + \frac{(q_b - q_a)a^2 b^2}{2\mu(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r},$$

$$\sigma_r = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} + q_b \cdot \frac{b^2(a^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_\theta = q_a \cdot \frac{a^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{b^2(r^2 + a^2)}{r^2(b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_z = q_a \cdot \frac{\lambda a^2}{(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)} - q_b \cdot \frac{\lambda b^2}{(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}.$$

1.3. Конечно-элементная формулировка

Для численного решения задачи использован метод конечных элементов (МКЭ). Основой метода является вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = 0,$$

где Π — полная энергия системы, выписанная через кинематически допустимые перемещения и деформации

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) = \iiint_V w(\varepsilon_{ij}) dV - \iiint_V \rho Q_i u_i dV - \iint_S p_i u_i dS.$$

Здесь $w(\varepsilon_{ij})$ — удельная упругая энергия, которая дается соотношением

$$w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}.$$

Деформации связаны с перемещениями u_i (непрерывными во всём теле и удовлетворяющими граничным условиям $u_i = u_i^0$ на S_u) геометрическими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Величины ρQ_i — массовые силы, заданные во всем объеме, а p_i — внешние силы, заданные на части поверхности S_p .

Для реализации МКЭ в осесимметричной постановке вводятся одномерные линейные элементы. Функции формы в локальной системе координат u ($-1 \leq u \leq 1$) имеют вид:

$$[\mathbf{N}]^e = [N_1(u) \quad N_2(u)], \quad N_1(u) = \frac{1-u}{2}, \quad N_2(u) = \frac{1+u}{2},$$

где

$$u = \frac{2r - (r_i + r_{i+1})}{\Delta r}, \quad \Delta r = r_{i+1} - r_i.$$

Матрица деформаций-перемещений связывает вектор деформаций с вектором узловых перемещений в форме

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ 0 \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 1 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}^e \cdot \{u\}^e = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 1 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}^e \cdot [\mathbf{N}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} \\ 2 \\ u\Delta r + (r_i + r_{i+1}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{N}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e = [\mathbf{D}]^e \cdot [\mathbf{N}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e. \end{aligned}$$

Упругие свойства материала описываются матрицей упругости, связывающей напряжения и деформации. Для изотропного материала в осесимметричной задаче, согласно закону Гука, получим:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}^e \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}^e = [\mathbf{C}]^e \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e = [\mathbf{C}]^e \cdot [\mathbf{D}]^e \cdot [\mathbf{N}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e.$$

Подставляя эти соотношения в выражение для полной энергии, получим формулу для энергии деформации элемента и матрицу жёсткости элемента:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^{eT} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e dV = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} \cdot [\mathbf{N}]^{eT} \cdot [\mathbf{D}]^{eT} \cdot [\mathbf{C}]^e \cdot [\mathbf{D}]^e \cdot [\mathbf{N}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e dV = \\ &= \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} \sum_e \int_{V^e} [\mathbf{N}]^{eT} \cdot [\mathbf{D}]^{eT} \cdot [\mathbf{C}]^e \cdot [\mathbf{D}]^e \cdot [\mathbf{N}]^e dV_e \{\boldsymbol{\delta}\}^e = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\delta}\}^{eT} \cdot [\mathbf{K}]^e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}^e, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}]^e &= \int_{V^e} [\mathbf{N}]^{eT} \cdot [\mathbf{D}]^{eT} \cdot [\mathbf{C}]^{eT} \cdot [\mathbf{D}]^e \cdot [\mathbf{N}]^e dV_e = \\
&= \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^H [\mathbf{k}(r)]^e \cdot |r| dz d\theta dr = 2\pi H \cdot \int_{-1}^1 [\mathbf{k}(u)]^e \cdot r(u) \cdot \frac{dr}{du} du.
\end{aligned}$$

После сборки глобальной матрицы жёсткости и учёта граничных условий решается система линейных алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{F\},$$

где $[\mathbf{K}]$ — матрица жесткости системы, $\{U\}$ — обобщенный вектор узловых параметров системы.

2. Реализация МКЭ в среде «Engsee»

2.1. Код программы для алгоритма

Алгоритм решения задачи реализован в среде математических вычислений «Engsee», который включает:

- автоматическую генерацию сетки из конечных элементов;
- аналитическое вычисление матриц жесткости элемента;
- сборку матрицы жесткости системы;
- решение системы линейных алгебраических уравнений;
- сравнение результатов аналитического решения и численного моделирования.

На рис. 1 представлена стартовая страница платформы математических вычислений и динамического моделирования «Engsee» [3].

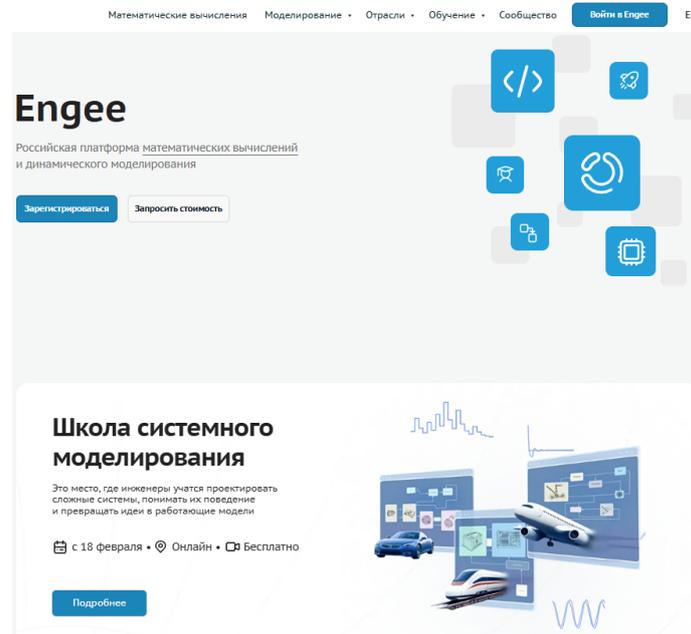


Рис. 1. Стартовая страница платформы «Engsee»

2.2. Реализация в «Engsee»

```

using LinearAlgebra
using Symbolics
using NumericalIntegration

```

```

using Plots
using Symbolics: solve_for

@variables u, r, r1, r2
Du = Differential(u)
ED(x)=expand_derivatives(x)

# Параметры материала и геометрии
a = 1.0
b = 1.5
p_a = 100.0
p_b = 200.0
E = 21000.0
nu = 0.3
n = 100
vectorR=collect(a:1.0/n*(b-a):b)

# Функции формы и преобразования координат
U(r, r1, r2) = (2.0*r - (r1 + r2)) / (r2 - r1)
R(u, r1, r2) = (u * (r2 - r1) + r1 + r2) *0.5
N1(u) = (1 - u) *0.5
N2(u) =(1 + u) *0.5
N(u) = [N1(u) N2(u)]

# Произведение матрицы производных на матрицу функций формы
DN(u, r1, r2) = [ED(Du(N1(u)))/ED(Du(R(u, r1, r2))) ED(Du(N2(u)))/ED(Du(R(u,
r1, r2)))];
N1(u)/R(u, r1, r2)          N2(u)/R(u, r1, r2);
N1(u)/R(u, r1, r2)          N2(u)/R(u, r1, r2)]

# Матрица упругости
lambda = E * nu / ((1.0 + nu) * (1.0 - 2.0*nu))
mu = E / (2.0 * (1.0 + nu))
C = [lambda + 2*mu  lambda          lambda;
      lambda          lambda + 2*mu lambda;
      lambda          lambda          lambda + 2*mu]

# Точки и веса квадратуры Гаусса
u_vals = [-1/sqrt(3.0), 1/sqrt(3.0)]
w_vals = [1.0, 1.0]

# Численное интегрирование матрицы жесткости элемента
Ke_num = zeros(2, 2)
for k in 1:2
    u_k = u_vals[k]
    w_k = w_vals[k]
    D_N = substitute.(DN(u, r1, r2),[u=>u_k])
    rk = R(u_k, r1, r2)
    dr_du = substitute(ED(Du(R(u, r1, r2))),[u=>u_k])
    factor_io = 2 * pi * rk^2 * dr_du * w_k
    Ke_num += (D_N' * C * D_N) * factor_io
end

# Нахождение "глобальной" матрицы
substitute.(Ke_num,(Dict(r1=>vectorR[1], r2=>vectorR[1+1]),))
Ke(r1, r2)=Ke_num

```

```

Ks=Num.(zeros(n+1,n+1))
for i in 1:n
    Ke_loc=(substitute.(Ke(r1, r2),(Dict(r1=>vectorR[i], r2=>vectorR[i+1]),)))
    for j in 0:1
        for k in 0:1
            Ks[i+j,i+k]=Ks[i+j,i+k]+Ke_loc[j+1,k+1]
        end
    end
end
end

# Глобальный вектор нагрузки Fs
Fs = Num.(zeros(n+1))
# Только первый и последний элементы ненулевые
Fs[1] = 2.0 * π * a^2 * p_a
Fs[end] = -2.0 * π*b^2 * p_b

# Вектор перемещений
U_sym = Ks \ Fs

# Превращаем Symbolics.Num в Float64
u_num = [eval(Symbolics.toexpr(ui)) for ui in U_sym]

# Аналитическое решение
function u_analytical(r)
    term1=((p_b*b^3 - p_a*a^3) / ((3*lambda + 2*mu)*(a^3 - b^3))) * r
    term2=((p_a - p_b)*a^3*b^3) / (4*mu*(b^3 - a^3)) * (1/r^2)
    return term1 + term2
end
u_an = [u_analytical(r) for r in vectorR]

# Вычисление напряжений
sigma_fem = Num.(zeros(n+1,3))
for i in 1:n
    r1_val = vectorR[i]
    r2_val = vectorR[i+1]
    # Вектор перемещений элемента
    d_element = [u_num[i]; u_num[i+1]]
    sigma_loc(r)=substitute.(substitute.(C*DN(u,r1,r2)*d_element,
    Dict(r1=>vectorR[i], r2=>vectorR[i+1]),))
    for j in 1:3
        for k in 0:1
            sigma_fem[i+k,j]+=(substitute.(sigma_loc(r),(Dict
            (r=>vectorR[i+k]),)))][j]
        end
    end
end
end

for i in 2:n
    for j in 1:3
        sigma_fem[i,j]*=0.5
    end
end

# Напряжения
sigma_fem_kor = [eval(Symbolics.toexpr(ui)) for ui in sigma_fem]
display(sigma_fem_kor)

```

```

# Аналитическое формулы для напряжений
function sigma_r_analytical(r)
    term1=p_a*(a^3*(r^3-b^3))/(r^3*(b^3-a^3))
    term2=p_b*(b^3*(a^3-r^3))/(r^3*(b^3-a^3))
    return term1 + term2
end

function sigma_theta_analytical(r)
    term1=p_a*(a^3*(2*r^3+b^3))/(2*r^3*(b^3-a^3))
    term2=p_b*(b^3*(2*r^3+a^3))/(2*r^3*(b^3-a^3))
    return term1 - term2
end

function sigma_phi_analytical(r)
    term1=p_a*(a^3*(2*r^3+b^3))/(2*r^3*(b^3-a^3))
    term2=p_b*(b^3*(2*r^3+a^3))/(2*r^3*(b^3-a^3))
    return term1 - term2
end

# Вычисляем аналитические напряжения
sigma_r_an = [sigma_r_analytical(r) for r in vectorR]
sigma_theta_an = [sigma_theta_analytical(r) for r in vectorR]
sigma_phi_an = [sigma_phi_analytical(r) for r in vectorR]

# Графики перемещений и напряжений
p1 = plot(vectorR, u_num, lw=3, label="FEM", color=:steelblue,
    xlabel="r", ylabel="u(r)", title="Перемещения",
    grid=true, legend=:topright)
plot!(vectorR, u_an, marker=:circle, markersize=2, label="Analytical",
    color=:coral,linealpha=0)

p2 = plot(vectorR, sigma_r_an, lw=3, label="σ_r Analytical", color=:darkgreen,
    xlabel="r", ylabel="σ_r", title="Радиальные напряжения",
    grid=true, legend=:topright)
plot!(vectorR, sigma_fem_kor[1:n+1,1], marker=:circle, markersize=2, label="σ_r
FEM", color=:gold,linealpha=0)

p3 = plot(vectorR, sigma_theta_an, lw=3, label="σ_θ Analytical", color=:purple,
    xlabel="r", ylabel="σ_θ", title="Окружные напряжения",
    grid=true, legend=:bottomright)
plot!(vectorR, sigma_fem_kor[1:n+1,2], marker=:circle, markersize=2, label="σ_θ
FEM", color=:turquoise,linealpha=0)

y_min = min(minimum(sigma_phi_an), minimum(sigma_fem_kor[1:n+1,3]))
y_max = max(maximum(sigma_phi_an), maximum(sigma_fem_kor[1:n+1,3]))
margin = (y_max - y_min) * 0.1
p4 = plot(vectorR, sigma_phi_an, lw=3, label="σ_phi Analytical", color=:firebrick,
    xlabel="r", ylabel="σ_phi", title="Осевое напряжения",
    grid=true, legend=:bottomright,
    ylims=(y_min - margin, y_max + margin),
    xlims=(a, b))
plot!(vectorR, sigma_fem_kor[1:n+1,3], marker=:circle, markersize=2, label="σ_phi
FEM", color=:darkorange,linealpha=0)

# Вывод графиков
display(p1)
display(p2)

```

```
display(p3)
display(p4)
```

2.3. Сравнительный анализ результатов

В ходе решения задачи были получены графики сравнений радиальной компоненты перемещений (рис. 2) и радиальных и окружных компонент тензора напряжений (рис. 3, 4) для аналитического и численного решений.

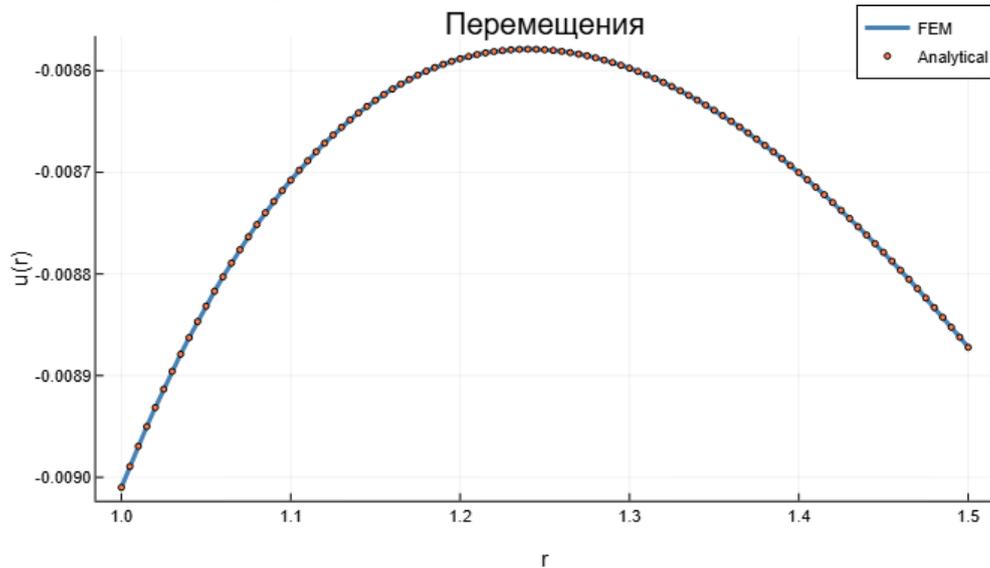


Рис. 2. Зависимость радиального перемещения u от координаты r

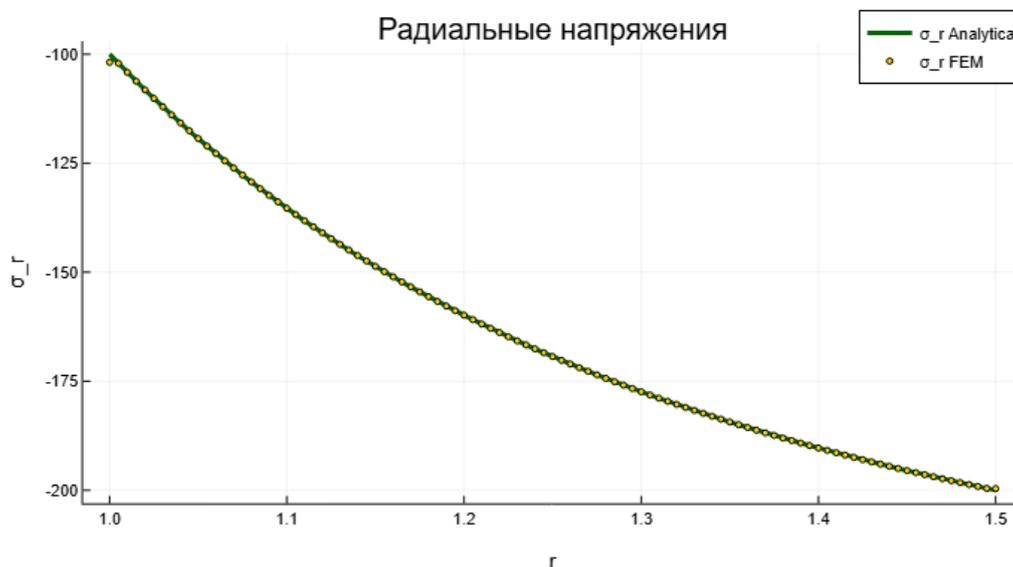


Рис. 3. Распределение радиальных напряжения σ_r по толщине стенки цилиндра

Заключение

В рамках данной работы было выполнено численное моделирование классической задачи Ламе для толстостенного цилиндра, находящегося под действием внутреннего и внешнего давлений, с использованием метода конечных элементов в отечественной среде математических вычислений и динамического моделирования «Engeer».

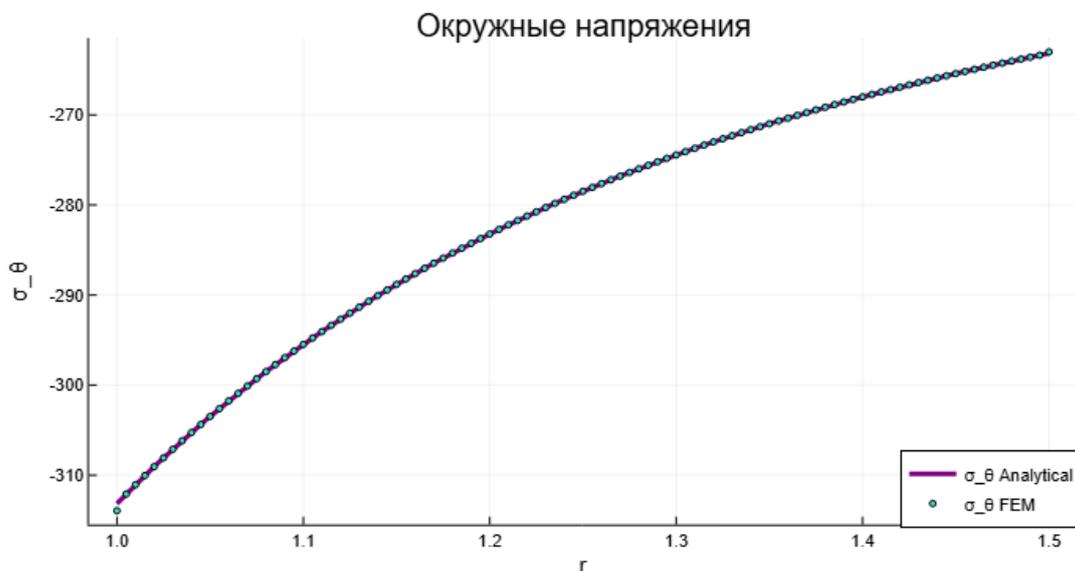


Рис. 4. Распределение окружных напряжения σ_θ по толщине стенки цилиндра

Проведённое исследование подтвердило корректность и работоспособность реализованного в «Engsee» алгоритма МКЭ для решения осесимметричных задач теории упругости. Достаточное совпадение результатов численного моделирования с классическим аналитическим решением свидетельствует о высокой точности вычислений и корректности постановки задачи. Таким образом, среда «Engsee» доказала свою эффективность как инструмент для решения инженерных задач механики деформируемого твёрдого тела, обеспечивая необходимую точность и наглядность результатов. Её использование для задач подобного класса является полностью оправданным.

Вместе с тем, в ходе работы был отмечен ряд особенностей и ограничений платформы. Ключевым из них является отсутствие возможности символьных вычислений в рамках интегрирования, что может быть неудобно на этапе предварительного аналитического исследования и проверки соотношений. Данное ограничение сужает область применения «Engsee» преимущественно к численному моделированию, оставляя за рамками среды этап аналитического вывода и преобразования формул.

Литература

1. Российская платформа математических вычислений и динамического моделирования Engsee [Электронный ресурс]. – Веб-сайт. – URL: <https://start.engsee.com/> (дата обращения: 17.10.2025).
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Демидов С. П. Теория упругости: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
4. Гоцев Д. В. К описанию одномерной неоднородности упругих характеристик материалов / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж. – 2021. – С. 1265–1276.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ

А. А. Маркин, М. Ю. Соколова

Тульский государственный университет

Аннотация. На основе построения векторного образа симметричного тензора, определенного в главных осях, построены трехмерные образы процессов деформирования и нагружения. Для дифференциально-линейных материалов проведен анализ определяющих соотношений в начальный момент процесса, когда напряжения и деформации отсутствуют. Показано, что модуль объемной упругости K и модуль сдвига G , входящие в дифференциально-линейные соотношения, имеют универсальный характер и не меняют своих значений в моделях, учитывающих геометрическую и физическую нелинейности.

Ключевые слова: упругость, изотропия, симметричный тензор, векторный образ, процесс деформирования, процесс нагружения, простой процесс, дифференциально-линейный материал, частный постулат изотропии, универсальные константы упругости.

Введение

Одной из важнейших проблем нелинейной теории упругости является корректный учет геометрической и физической нелинейностей в поведении материалов [1, 2]. В настоящее время существует множество моделей, в которых для учета геометрической нелинейности используют обобщение линейных соотношений закона Гука, записанных относительно различных известных мер конечных деформаций [3]. Известны также модели, которые при малых деформациях описывают нелинейную связь между напряжениями деформациями [1]. Один из возможных вариантов обобщения таких моделей на случай конечных деформаций представлен в статье [4].

В работе [5] анализируется общая форма определяющих соотношений нелинейно упругих изотропных материалов. При этом рассматриваются шестимерные образы процессов деформирования [6]. В данной работе на основе построения векторного образа симметричного тензора записывается дифференциально линейная связь между напряжениями и деформациями. Будет показано, что свойства дифференциально линейных изотропных материалов в начальном состоянии определяются двумя универсальными константами. В статье будет показано, что все дифференциально линейные материалы удовлетворяют частному постулату изотропии [6, 7] при конечных деформациях.

1. Построение векторного образа симметричного тензора

Симметричный тензор \mathbf{M} представлен в виде диадного разложения по базису главных осей \vec{e}_i

$$\mathbf{M} = M_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + M_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + M_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Запишем представление тензора в виде суммы шаровой и девiatorной составляющих

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} + \frac{1}{3}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1)$$

Цель состоит в построении векторного образа разбиения (1)

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_\theta + \mathbf{m}_e. \quad (2)$$

При этом должны удовлетворяться следующие условия:

1) длина вектора \mathbf{m} совпадает со сверткой тензора \mathbf{M}

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{M}; \quad \mathbf{m} = m_i \mathbf{e}_i = M_{11} \mathbf{e}_1 + M_{22} \mathbf{e}_2 + M_{33} \mathbf{e}_3. \quad (3)$$

2) длина вектора \mathbf{m}_θ совпадает со сверткой шаровой составляющей тензора \mathbf{M}

$$\mathbf{m}_\theta \cdot \mathbf{m}_\theta = \frac{1}{9} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E})^2 \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{3} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E})^2. \quad (4)$$

3) длина вектора \mathbf{m}_e совпадает со сверткой девиаторной составляющей тензора \mathbf{M}

$$\mathbf{m}_e \cdot \mathbf{m}_e = \tilde{\mathbf{M}} \cdot \cdot \tilde{\mathbf{M}}. \quad (5)$$

4) следствием (1)–(5) является ортогональность векторов-образов

$$\mathbf{m}_\theta \cdot \mathbf{m}_e = 0. \quad (6)$$

Вектор \mathbf{m}_θ представим в виде, удовлетворяющем указанным требованиям, в частности (4)

$$\mathbf{m}_\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}) \mathbf{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} m_\theta \mathbf{i}_0, \quad (7)$$

$$\mathbf{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad m_\theta = \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}. \quad (8)$$

Из условий (5) и (6) получаем выражение образа девиаторной составляющей

$$\mathbf{m}_e = \left(\tilde{\mathbf{M}} \cdot \cdot \tilde{\mathbf{M}} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

где \mathbf{e}_0 — единичный вектор.

Из (9), (7) и (2) получим разложение вектор-образа по естественному базису

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}) \mathbf{i}_0 + \left(\tilde{\mathbf{M}} \cdot \cdot \tilde{\mathbf{M}} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_0 = \mathbf{m}_\theta + \mathbf{m}_a.$$

Здесь вектор \mathbf{e}_0 единичный, перпендикулярный вектору \mathbf{i}_0 и расположенный в плоскости \mathbf{m} , \mathbf{m}_θ :

$$\mathbf{e}_0 = \left(\tilde{\mathbf{M}} \cdot \cdot \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_\theta). \quad (10)$$

Третий вектор естественного базиса находим из условия $\mathbf{n}_0 = \mathbf{i}_0 \times \mathbf{e}_0$. Обозначим через $\mathbf{n} = \mathbf{m}_\theta \times \mathbf{m}_e$, тогда

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}}{n} = \frac{(m_3 - m_2) \mathbf{e}_1 + (m_1 - m_3) \mathbf{e}_2 + (m_2 - m_1) \mathbf{e}_3}{\sqrt{(m_3 - m_2)^2 + (m_1 - m_3)^2 + (m_2 - m_1)^2}}. \quad (11)$$

Векторы \mathbf{i}_0 , \mathbf{e}_0 , \mathbf{n}_0 образуют декартов базис, связанный с базисом главных осей исходного тензора \mathbf{M} , и определяются по формулам (8), (10) и (11).

Рассмотрим процессы изменения тензора \mathbf{M} и его вектора-образа \mathbf{m} с фиксированной ориентацией главных осей \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . При этом положение векторов \mathbf{e}_0 , \mathbf{n}_0 естественного базиса будет изменяться, а вектор \mathbf{i}_0 остается фиксированным. Такие процессы называют изотропными. Для ориентации естественных базисов относительно неподвижного базиса \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 удобно использовать октаэдрический базис с векторами \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , лежащими в плоскости, перпендикулярной \mathbf{i}_0 . Разложение векторов естественного базиса по фиксированному октаэдрическому базису для вектора \mathbf{m} имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{0m} &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_m(t) + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_m(t), \\ \mathbf{n}_{0m} &= -\mathbf{i}_1 \sin \alpha_m(t) + \mathbf{i}_2 \cos \alpha_m(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha_m(t)$ — угол между векторами \mathbf{i}_1 и $\mathbf{e}_{0m}(t)$.

Начальное положение естественного базиса определяется условиями:

$$\alpha_m(t) \Big|_{t=0} = \alpha_m^{(0)}; \quad (13)$$

$$e \equiv m_e|_{t=0} = 0; \quad \theta \equiv m_\theta|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Условие (13) означает, что в начальном состоянии должен быть задан вид этого состояния. Начальным называется состояние, при котором выполняются условия (14). Начальное положение естественного базиса определяется из (12) при условии (13). В тот же момент $\mathbf{m}(t)|_{t=0} = 0$, что следует из (14). С учетом (12) «девиаторная» составляющая вектора \mathbf{m} принимает вид

$$\mathbf{m}_e = m_e (\mathbf{i}_1 \cos \alpha_m(t) + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_m(t)). \quad (15)$$

«Шаровая» составляющая

$$\mathbf{m}_\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} m_\theta \mathbf{i}_0. \quad (16)$$

Если положить, что вектор \mathbf{i}_1 расположен так, что линия его действия пересекает \mathbf{e}_1 (базис А. А. Ильюшина [6]), то известно, что

$$\cos 3\alpha_m = 3\sqrt{6} \frac{m_{e1} m_{e2} m_{e3}}{m_e^3}.$$

Компоненты \mathbf{m}_e в базисе $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ имеют вид

$$m_{e1} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_e \cos \alpha_m, \quad m_{e2} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_e \cos \left(\alpha_m + \frac{2\pi}{3} \right), \quad m_{e3} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_e \cos \left(\alpha_m + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Введем угол β_m между векторами \mathbf{m} и \mathbf{m}_θ , тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{m_\theta}{m} = \cos \beta_m, \quad \frac{m_e}{m} = \sin \beta_m. \quad (17)$$

Добавим начальное условие

$$\beta_m|_{t=0} = \beta_m^{(0)}. \quad (18)$$

Вектор \mathbf{m} представим, следуя условиям (15)–(17), в виде

$$\mathbf{m} = m_e \mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} m_\theta \mathbf{i}_0 = m \sin \beta_m (\mathbf{i}_1 \cos \alpha_m + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_m) + m \cos \beta_m \mathbf{i}_0. \quad (19)$$

Найдем частные производные для построения дифференциала

$$d\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial m} dm + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_m} d\alpha_m + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \beta_m} d\beta_m, \quad (20)$$

$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial m} = \mathbf{m}_0 = \frac{\mathbf{m}}{m}$ — единичный вектор вдоль вектора \mathbf{m} ;

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_m} d\alpha_m = m \sin \beta_m (-\mathbf{i}_1 \sin \alpha_m + \mathbf{i}_2 \cos \alpha_m) = m \sin \beta_m \mathbf{n}_0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \beta_m} d\beta_m = m \cos \beta_m (\mathbf{i}_1 \cos \alpha_m + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_m) - m \sin \beta_m \mathbf{i}_0 = m \cos \beta_m \mathbf{e}_0 - m \sin \beta_m \mathbf{i}_0.$$

В результате подстановки (21) в (20) получим выражение дифференциала в естественном базисе. Предварительно покажем, что из (19) следует, что

$$\frac{\mathbf{m}}{m} \equiv \mathbf{m}_0 = \sin \beta_m \mathbf{e}_0 + \cos \beta_m \mathbf{i}_0.$$

В результате получим выражение дифференциала в виде:

$$d\mathbf{m} = (\sin \beta_m \mathbf{e}_0 + \cos \beta_m \mathbf{i}_0) dm + m \sin \beta_m \mathbf{n}_0 d\alpha_m + m (\cos \beta_m \mathbf{e}_0 - \sin \beta_m \mathbf{i}_0) d\beta_m. \quad (22)$$

Сформулируем начальное состояние процесса (19):

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}}{m} = \lim_{m \rightarrow 0} \mathbf{m}_0 \equiv \mathbf{m}_0^{(0)} = \sin \beta_m^{(0)} (\cos \alpha_m^{(0)} \mathbf{i}_1 + \sin \alpha_m^{(0)} \mathbf{i}_2) + \cos \beta_m^{(0)} \mathbf{i}_0. \quad (23)$$

Здесь $\mathbf{m}_0^{(0)}$ — начальное положение вектора \mathbf{m}_0 .

Под траекторией процесса будем понимать линию, получаемую из уравнения (19) при заданных параметрах состояния $m = m(t)$; $\alpha = \alpha(t)$; $\beta = \beta(t)$, а если в качестве параметра t принять m , то

$$\alpha = \alpha_m(m); \quad \beta = \beta_m(m),$$

удовлетворяющих начальным условиям (13), (18), (23)

$$\alpha_m|_{m=0} = \alpha_m^{(0)}; \quad \beta_m|_{m=0} = \beta_m^{(0)}.$$

Особый интерес представляют простые (по терминологии А. А. Ильюшина) процессы. Они являются лучевыми, то есть происходят при постоянных значениях параметров процесса

$$\alpha_m(m) = \alpha_m^{(0)}; \quad \beta_m(m) = \beta_m^{(0)}. \quad (24)$$

Уравнение лучевой траектории исходя из (19) и (24) можно представить в виде

$$\mathbf{m} = m \mathbf{m}_0 = m \sin \beta_m^{(0)} (\cos \alpha_m^{(0)} \mathbf{i}_1 + \sin \alpha_m^{(0)} \mathbf{i}_2) + m \cos \beta_m^{(0)} \mathbf{i}_0.$$

В естественном базисе уравнение траектории принимает вид

$$\mathbf{m} = m (\sin \beta_m \mathbf{e}_0 + \cos \beta_m \mathbf{i}_0). \quad (25)$$

Представление (25) не позволяет учесть зависимость от угла α .

2. Векторные образы сопряженных тензоров деформаций и напряжений

Образ вектора деформаций представим в виде (19), обозначая $\mathbf{m} = \mathfrak{e}$, $\mathbf{m}_0 = \mathfrak{e}_0$, $\mathbf{m}_e = \mathbf{e}$, $\mathbf{m}_\theta = \theta$, $\alpha_m = \alpha_\theta$, $\beta_m = \beta_\theta$. Тогда (19) принимает вид

$$\mathfrak{e} = e \mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \theta \mathbf{i}_0 = \mathfrak{e} \sin \beta_\theta (\mathbf{i}_1 \cos \alpha_\theta + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_\theta) + \mathfrak{e} \cos \beta_\theta \mathbf{i}_0. \quad (26)$$

Для вектора напряжений принимаем обозначения $\mathbf{m} = \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{m}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0$, $\mathbf{m}_e = \boldsymbol{\sigma}_e$, $m_\theta = \sigma_\theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $\alpha_m = \alpha_\sigma$, $\beta_m = \beta_\sigma$. Также для вектора \mathbf{e}_0 введем обозначение $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0^{(\sigma)}$. Тогда образ вектора напряжений в соответствии с (19) представляется в виде

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_e \bar{\mathbf{e}}_0^{(\sigma)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_\theta \bar{\mathbf{i}}_0 = \sigma \sin \beta_\sigma (\bar{\mathbf{i}}_1 \cos \alpha_\sigma + \bar{\mathbf{i}}_2 \sin \alpha_\sigma) + \sigma \cos \beta_\sigma \bar{\mathbf{i}}_0. \quad (27)$$

Найдем дифференциалы векторов (26), (27) в начальном состоянии, когда $\mathfrak{e} = 0$, $\sigma = 0$. Из (22) получим

$$\begin{aligned} d\mathfrak{e} &= (\sin \beta_y^{(0)} \mathbf{e}_0 + \cos \beta_y^{(0)} \mathbf{i}_0) d\mathfrak{e}, \\ d\boldsymbol{\sigma} &= (\sin \beta_\sigma^{(0)} \mathbf{e}_0^{(\sigma)} + \cos \beta_\sigma^{(0)} \mathbf{i}_0) d\sigma. \end{aligned} \quad (28)$$

Сформулируем начальные условия для системы (28) в виде совпадения в начальном состоянии направляющих векторов напряжений и деформаций

$$\boldsymbol{\sigma}_0^{(0)} = \mathfrak{e}_0^{(0)}. \quad (29)$$

Из (26), (27) получаем совпадение углов в начальном состоянии

$$\alpha_\theta^{(0)} = \alpha_\sigma^{(0)} = \alpha^{(0)}, \quad \beta_\theta^{(0)} = \beta_\sigma^{(0)} = \beta^{(0)}. \quad (30)$$

Учитывая, что из (17) следует

$$d\mathfrak{e} \sin \beta_y^{(0)} = de, \quad d\mathfrak{e} \cos \beta_y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} d\theta,$$

$$d\sigma \sin \beta_\sigma^{(0)} = d\sigma_e, \quad d\sigma \cos \beta_\sigma^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma_\theta,$$

соотношения (28) принимают вид:

$$\begin{aligned} d\varepsilon|_0 &= de\mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} d\theta\mathbf{i}_0, \\ d\boldsymbol{\sigma}|_0 &= d\sigma_e\mathbf{e}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma_\theta\mathbf{i}_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) получаем прямую связь между начальными дифференциалами напряжений и деформаций

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left. \frac{d\sigma_e}{de} \right|_0 de\mathbf{e}_0 + \left. \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} \right|_0 d\theta\mathbf{i}_0. \quad (32)$$

Обратная связь принимает вид

$$d\varepsilon = \left. \frac{de}{d\sigma_e} \right|_0 d\sigma_e\mathbf{e}_0 + \left. \frac{d\theta}{d\sigma_\theta} \right|_0 d\sigma_\theta\mathbf{i}_0. \quad (33)$$

Если положить входящие в (32) постоянные равными

$$\left. \frac{d\sigma_e}{de} \right|_0 = 2G, \quad \left. \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} \right|_0 = 3K, \quad (34)$$

то приходим к совпадению связей между дифференциалами в начальном состоянии с обобщенным законом Гука.

Отметим, что данная связь следует из условий совпадения начальных состояний (29), (30). Это означает, что любые обобщения закона Гука за счет учета нелинейных эффектов должны удовлетворять в начальном состоянии при $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ дифференциальным связям в виде (32), (33). Этим определяется фундаментальный характер постоянных G и K .

3. Варианты определяющих соотношений на основе частного постулата

Положим дифференциалы (33) и (34) конечными приращениями $d\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$, $d\varepsilon \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда прямое и обратное соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_e(e)\mathbf{e}_0 + \sigma_\theta(\theta)\mathbf{i}_0, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= e(\sigma_e)\mathbf{e}_0 + \theta(\sigma_\theta)\mathbf{i}_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Представим скалярные зависимости в форме А.А. Ильюшина [6]

$$\sigma_e(e) = 2Ge(1 + \omega_e(e)), \quad \sigma_\theta(\theta) = K\theta(1 + \omega_\theta(\theta)), \quad (36)$$

где $\omega_e(e)$, $\omega_\theta(\theta)$ — функции А. А. Ильюшина.

Обратные функции имеют вид

$$e(\sigma_e) = \frac{1}{2G} \sigma_e(1 + \Omega_e(\sigma_e)), \quad \theta(\sigma_\theta) = \frac{1}{K} \sigma_\theta(1 + \Omega_\theta(\sigma_\theta)).$$

Функции Ильюшина определяются по формулам, аналогичным следующим

$$\omega_e(e) = \frac{\sigma_e(e)}{2Ge} - 1, \quad \omega_\theta(\theta) = \frac{\sigma_\theta(\theta)}{K\theta} - 1,$$

или, обозначая $\frac{\sigma_e(e)}{e} = 2G_{\text{сек}}$ — секущий модуль, $\omega_e(e) = \frac{G_{\text{сек}}(e)}{G} - 1$.

Чтобы законы (35), (36) удовлетворяли требованиям (29), (30), необходимо положить

$$\omega_e|_{e=0} = 0, \quad \omega_\theta|_{\theta=0} = 0.$$

Если принять $\omega_e \equiv 0$, $\omega_\theta \equiv 0$, то эти законы принимают форму обобщенного закона Гука для соосных пар тензоров напряжений и деформаций. В частности, в геометрически линейном приближении это тензоры напряжений и деформаций Коши. В нелинейном случае \mathfrak{E} является образом тензора Генки, $\boldsymbol{\sigma}$ — образ «повернутого» тензора напряжений. Использование данной пары позволяет сохранить связь инварианта θ с изменением объема, а e — с изменением формы в изотропных процессах.

При переходе от связей между векторами-образами к исходным тензорам векторы \mathbf{e} и $\boldsymbol{\sigma}_e$ принимаем девиаторами $\tilde{\mathfrak{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, вектор \mathbf{i}_0 меняем на $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{E}$. В результате закон (36) принимает вид

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2G(1 + \omega_e(e))\tilde{\mathfrak{E}} + K\theta(1 + \omega_\theta(\theta))\mathbf{E}. \quad (37)$$

Аналогичным образом записывается обратное соотношение

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2G}(1 + \Omega_e(\sigma_e))\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{1}{K}\sigma_\theta(1 + \Omega_\theta(\sigma_\theta))\mathbf{E}, \\ \Omega_e(\sigma_e) &= \frac{2Ge}{\sigma_e} - 1, \quad \Omega_\theta(\sigma_\theta) = \frac{K\theta}{\sigma_\theta} - 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что если функции Ильюшина дифференцируемы при $e \geq 0$, то $G_{сек} = G$ в начальный момент $e = 0$, далее законы отклоняются от линейных тем сильнее, чем больше разница $G - G_{сек}$. То же касается и секущих модулей объемного изменения. Это надо учитывать при аппроксимации функций Ильюшина по результатам полученных экспериментальных кривых $\sigma_e = \sigma_e(e)$ и $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\theta)$.

Заключение

На основе соотношений (37) и (38) возможно провести классификацию моделей упругих изотропных материалов:

1. Геометрически и физически линейные модели, когда \mathfrak{E} линейная относительно градиента перемещений функция, $\boldsymbol{\Sigma}$ — тензор напряжений, отнесенный к начальному базису. Функции Ильюшина нулевые.

2. Геометрически линейные, а физически нелинейные модели определяются функциями Ильюшина при линейных деформациях.

3. Геометрически нелинейные, а физически линейные соотношения. Мера деформаций — тензор Генки, мера напряжений — «повернутый» тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$. Тензор Генки связан с тензором конечных деформаций соотношением $\mathfrak{E} = \boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\epsilon})$. Функции Ильюшина нулевые.

4. Геометрически и физически нелинейные соотношения. Функции Ильюшина зависят от инвариантов меры Генки.

Еще раз подчеркнем, что константы G и K во всех этих моделях для одного материала одинаковы. В этом заключается их универсальный характер.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
2. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К. Ф. Черных. – Л. : Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986. – 336 с.
3. Xiao H. Hencky's elasticity model and linear stress-strain relations in isotropic finite hyperelasticity / H. Xiao, L.-S. Chen // Acta Mechanica. – 2002. – V. 157. – P. 51–60. doi:10.1007/BF01182154
4. Маркин А. А. Вариант соотношений нелинейной упругости / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2019. – № 6. – С. 68–75. doi: 10.1134/S0572329919060096
5. Маркин А. А. Термомеханика упругопластического деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.
6. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
7. Маркин А. А. Частный постулат А.А. Ильюшина и нелинейные соотношения для анизотропных тел / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2025. – № 1. – С. 95–104. doi: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-1-12

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Н. В. Минаева, М. М. Коротков

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе исследуется предельное состояние упругой неоднородной полосы с неровными боковыми границами в рамках модели физической нелинейности. Нагрузка включает независимые сжимающие усилия, приложенные к верхней, нижней и боковым поверхностям, геометрия которых задаётся функциональными зависимостями. Критерием предельного состояния выбрано нарушение непрерывности отклика системы относительно исходных параметров. Это условие разделено на два класса: потеря устойчивости равновесной формы (первая группа), и возникновение недопустимых деформаций (вторая группа). В математическую модель, наряду с нелинейными граничными условиями, включены углы поворота (подход Новожилова — Ишлинского). Получено: аналитическое условие границы области предельных состояний, и оценка влияния физической нелинейности на её положение. Результаты согласуются с известными решениями для частных случаев. Для различных параметров сечения определены области квазиоднородного НДС. **Ключевые слова:** предельное состояние, упругая полоса, непрерывная зависимость, комбинированное нагружение.

Введение

Современные инженерные системы — авиационные конструкции, транспортные инфраструктуры и промышленные сооружения — испытывают эволюцию свойств под воздействием длительной эксплуатации. Этот процесс характеризуется постепенным изменением геометрических и физико-механических характеристик материалов под комплексным воздействием нагрузок, температурных градиентов и других эксплуатационных факторов [1]. Особую сложность представляет квазистатический характер деградации, приводящий к накоплению остаточных деформаций, микротрещин и изменений структуры материала.

Современные подходы к проектированию предполагают соответствие напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций установленным нормативным требованиям. Однако, как показывают исследования, суммарный эффект эксплуатационных воздействий может привести к достижению критических состояний. Нарушение этого условия может проявляться в двух принципиально различных формах: потеря устойчивости равновесной конфигурации (форма потери устойчивости); накопление пластических деформаций и повреждений, приводящих к исчерпанию несущей способности (разрушение по критерию прочности). [1]. В этой связи особую важность приобретает анализ устойчивости НДС к вариациям начальных параметров системы [2].

Одним из основных условий, которым должна удовлетворять математическая модель, является непрерывная зависимость соответствующих решений от исходных данных [3]. Нарушение этого условия может проявляться в двух основных формах: потеря устойчивости равновесного состояния и развитие недопустимых деформаций и нарушение работоспособности [4–7].

Несмотря на значительное количество работ в данной области, остаются недостаточно изученными вопросы предельного состояния конструкций, связанного с потерей устойчивости, с учетом: упруго-нелинейного поведения материалов, неоднородности свойств и сложной геометрии контактных поверхностей.

Рассмотрим упругую полосу с неоднородными характеристиками материала и неидеальными поверхностями, подверженную сжатию усилиями, приложенными по контуру поперечного сечения (рис. 1).

1. Математическая модель

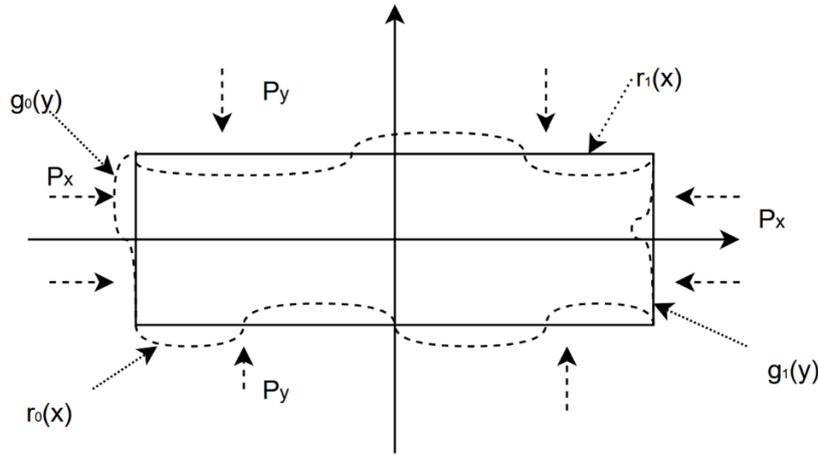


Рис. 1. Поперечное сечение полосы

В качестве математической модели, описывающей напряжённое состояние полосы из несжимаемого материала, примем следующую задачу [8, 9]

$$\frac{\partial(\sigma_x - \omega\tau)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau - \omega\sigma_y)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial(\tau + \omega\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y + \omega\tau)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 4G \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tau = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_y |_{y=r_0(x)} = -p_y, \sigma_y |_{y=r_1(x)} = -p_y$$

$$\sigma_x |_{x=g_0(y)} = -p_x, \sigma_x |_{x=g_1(y)} = -p_x. \quad (2)$$

Здесь $G(x, y) = G_0 + G_1(x, y)$, $G_0 = \text{const}$ соответствует модулю сдвига однородного материала, а $G_1(x, y)$ описывает изменение физических свойств полосы в процессе эксплуатации.

Функции $g_0(y)$ и $g_1(y)$ описывают правую и левую границу поперечного сечения полосы после деформирования, а $r_0(x)$ и $r_1(x)$ верхнюю и нижнюю границы соответственно. В ненагруженном состоянии эти кромки характеризуются функциями

$$g_0^{(0)}(y) = -l - l_0(y), g_1^{(0)}(y) = l + l_1(y)$$

$$r_0^{(0)}(x) = -h - h_0(x), r_1^{(0)}(x) = h + h_1(x) \quad (3)$$

где $l_i(y)$ и $h_i(x)$ ($i=0,1$) — описывают отклонение границ от прямолинейной формы. Если пренебречь несовершенствами, т. е. $l_i(y) = 0$ и $h_i(x) = 0$ ($i=0,1$), то задача (1)–(3) допускает решение [8, 9], описывающее однородное состояние:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 = -p_x; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 = -p_y; \quad \tau = \tau^0 = 0$$

$$v = v^0 = \varepsilon_y^0 y; \quad u = u^0 = \varepsilon_x^0 x; \quad \omega = \omega^0 = 0, \quad (4)$$

где константы из (4) ε_y^0 , ε_x^0 определяются следующими соотношениями

$$\varepsilon_y^0 = \frac{P_x - P_y}{4G}, \quad \varepsilon_x^0 = -\varepsilon_y^0.$$

Таким образом, идеализированную границу в деформированном состоянии можно записать так:

$$\begin{aligned} g_0 &= -l(1 + \varepsilon_x), g_1 = l(1 + \varepsilon_x) \\ r_0 &= -h(1 + \varepsilon_y), r_1 = h(1 + \varepsilon_y). \end{aligned} \quad (5)$$

Для изучения состояния полосы на основе (4), необходимо проанализировать решение задачи (1), при всех ли значениях исходных данных оно будет удовлетворять требуемым условиям непрерывной зависимости.

2. Исследования проблемы непрерывной зависимости

Для исследования проблемы непрерывной зависимости, как следует из [10, 11], следует рассмотреть вспомогательную линейризованную однородную задачу относительно функций ζ_i , которая получена на основе (1)–(4) ($\sigma_x = \sigma_x^0 + \zeta_1$; $\omega = \omega^0 + \zeta_2$; ... $v = v^{(0)} + \zeta_6$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + p_y \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} - p_x \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial y} &= 0; \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_6}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} \right) \\ \zeta_1 - \zeta_4 &= 4G \frac{\partial \zeta_5}{\partial x}; \quad \zeta_3 = G \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_6}{\partial x} \right) \\ \zeta_4 \Big|_{y_1=0, h_1} &= 0, \quad p_x \frac{d\zeta_6}{dx} + \zeta_3 \Big|_{y_1=0, h_1} = 0 \\ \zeta_3 + p_y \frac{d\zeta_5}{dy} \Big|_{x_1=0, l_1} &= 0, \quad \zeta_1 \Big|_{x_1=0, l_1} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= 2l(1 + \varepsilon_x^0), \quad h_1 = 2h(1 + \varepsilon_y^0), \quad \alpha_x = \frac{p_x}{2G}, \quad \alpha_y = \frac{p_y}{2G} \\ x_1 &= x + l(1 + \varepsilon_x), \quad y_1 = y + h(1 + \varepsilon_y). \end{aligned}$$

Чтобы решение задачи (1)–(3) непрерывно зависело от исходных данных, необходимо [10, 12], чтобы задача (6)–(7) была регулярной, ее первые производные были непрерывны по всем своим аргументам, а также она имела только тривиальное решение. Группа условий, касающаяся регулярности и непрерывности в этой задаче выполняется. Проанализируем существование только тривиального решения.

На рис. 2 для различных соотношений размеров поперечного сечения полосы, на плоскости параметров (α_x, α_y) показана граница, при пересечении которой решение (1)–(3) перестает приближенно описывать напряжённо-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой полосы.

Поскольку модель (1)–(3) основана на линейно-упругих допущениях, то критическая граница построена исключительно в пределах упругой области.

Если необходимо проанализировать влияние геометрических параметров на область непрерывной зависимости, то можно рассмотреть различные сечения поверхности, полученной исходя из требования непрерывной зависимости, задавая нужные значения параметров нагрузок.

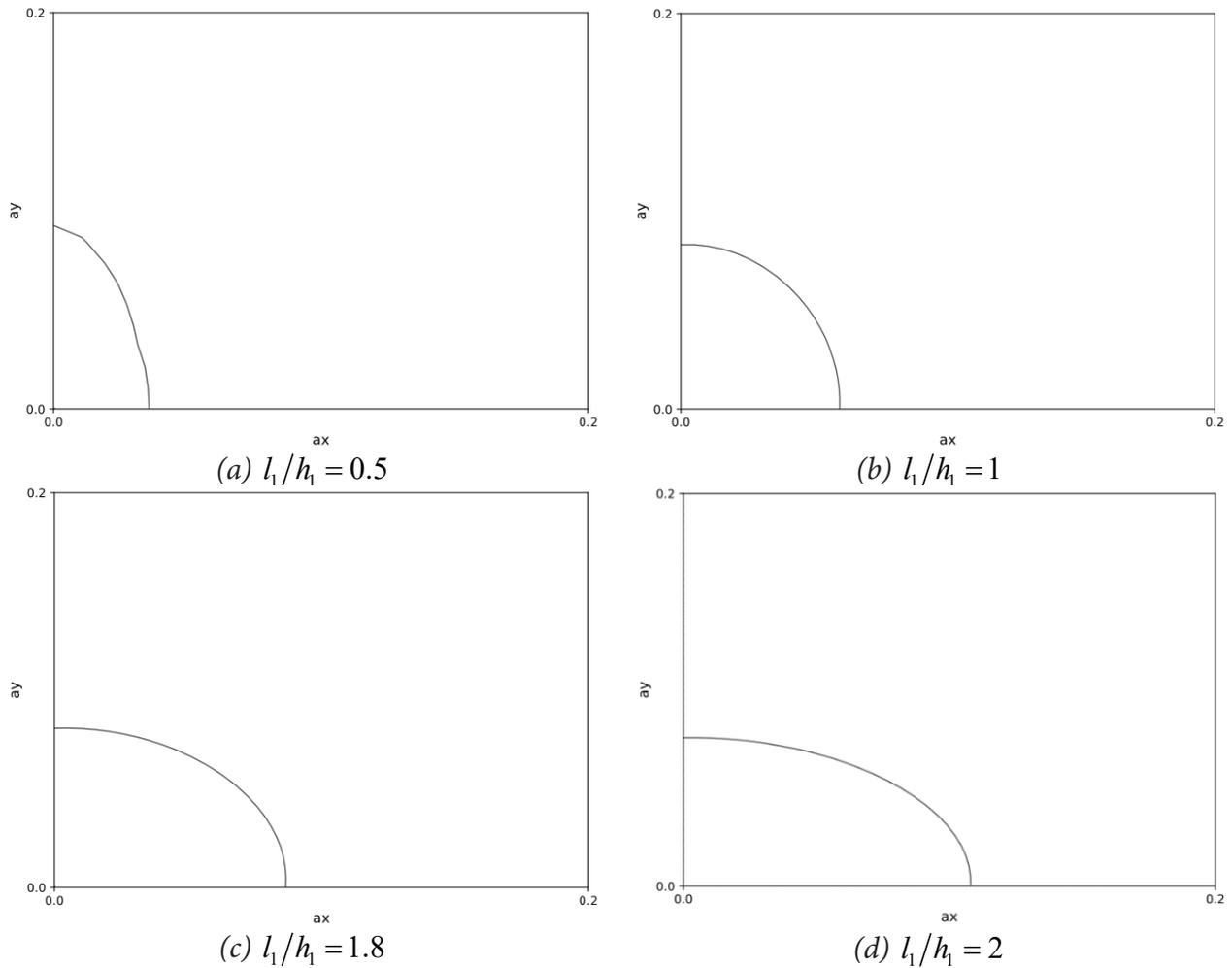


Рис. 2. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

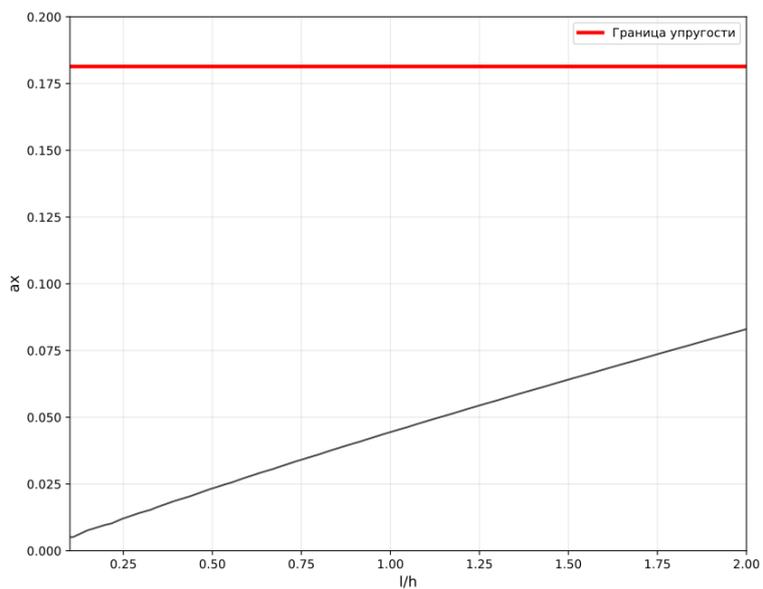
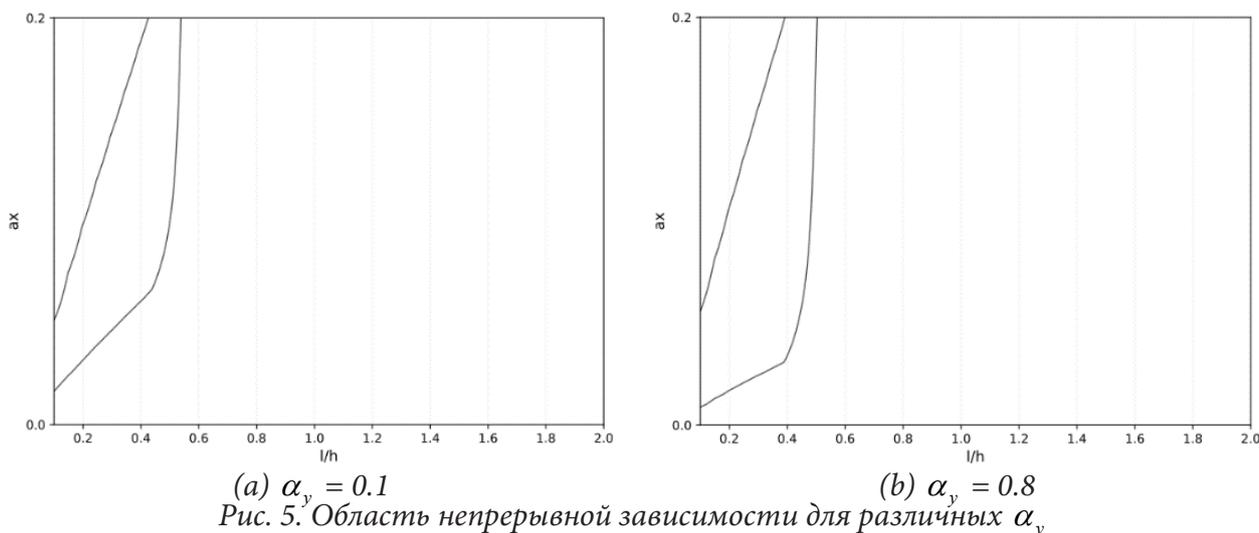
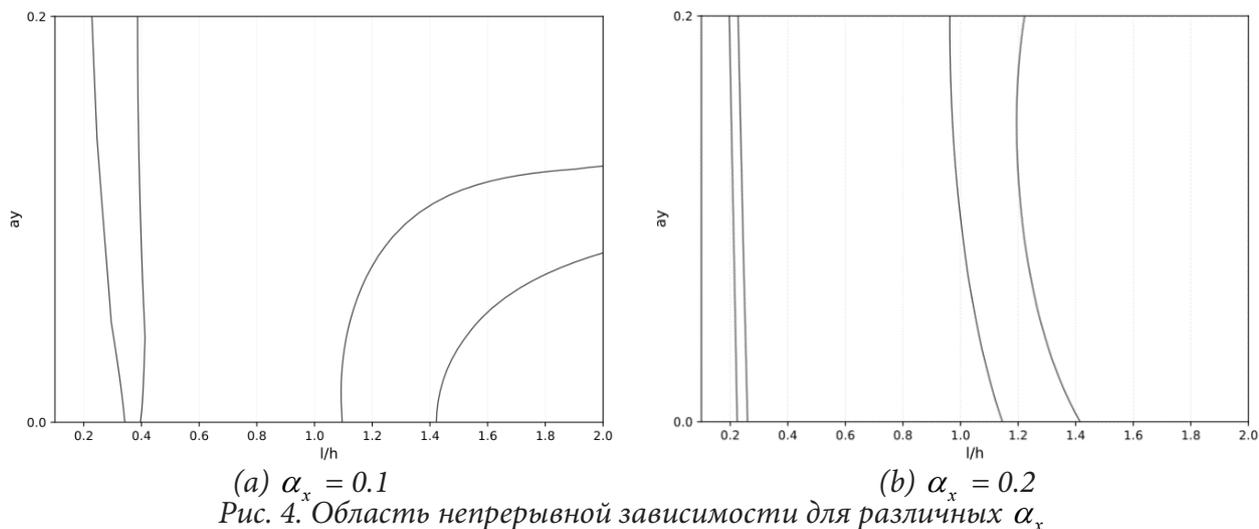


Рис. 3. Область непрерывной зависимости при $3\sigma_{упр}/2E = 0.1814$

На рис. 3 представлена область при $\alpha_x = 0$ для материала, изучаемому в [9]. При малых m_1 значения параметра α_y можно сравнить с критической нагрузкой для продольного изгиба стержня с шарнирно закрепленными концами, как это сделано в работах [8,9] $\alpha_y / \alpha_{кр} = 1.000241$.

Ниже изображены кривые, ограничивающие область непрерывной зависимости, для ряда значений α_x (рис. 4) α_y (рис. 5). Для выбранных значений линия, ограничивающая упругую область, лежит значительно выше найденных линий, поэтому она на рисунках не отображена.



Для многих материалов, у которых $3\sigma_{\text{упр}}/2E \ll 1$, область упругости весьма мала, и граница непрерывной зависимости находится выше нее. Получаем, что решение (4) будет приближенно описывать состояние полосы при любых значениях исходных данных, соответствующих упругой области. Но в этом случае диапазон изменения параметров сжимающих усилий весьма мал, поэтому, в подобных случаях можно использовать другое решение задачи (1), а не (4). Или же применять математическую модель, учитывающую более высокие порядки нелинейности или асимптотические аппроксимации для тонких структур, либо перейти к подходам, основанным на теории пластичности или композитных средах, в зависимости от характера деформирования.

Заключение

Когда исходные параметры достигают значений, при которых вспомогательная задача (6)–(7) допускает ненулевое решение, решение рассматриваемой задачи теряет свою непрерывную зависимость. В итоге может произойти потеря устойчивости равновесной формы, появиться значительные перемещения, прогибы или углы поворота, что приведет систему к предельному

состоянию. В частности, в рассматриваемом случае происходит потеря устойчивости равновесной формы (4), и состояние полосы, соответствующее (6) станет предельным. Полученные результаты следует учитывать при проектировании различных конструкций, при анализе соответствия установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам.

Литература

1. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. Введ. с 01.07.15. – М. : Стандартинформ, 2015. – 16 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. Zheleznov L. P. Study of nonlinear deformation and stability of a composite cylindrical shell under combined loading with torque, bending moments and internal pressure // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Vol. 64, Iss. 2. – P. 332–341. DOI: 10.1134/S0021894423020177
4. Vazhenov V. A., Luk'yanchenko O. O., Vorona Yu. V., Vabyshcheych M. O. The Influence of Shape Imperfections on the Stability of thin Spherical Shells // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 53. – P. 842–851.
5. Броуде Б. М. Потеря устойчивости как предельное состояние // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – № 6. – С.4–7.
6. Броуде Б. М., Бельский Г. И., Беляев Б. И. О потере устойчивости как предельном состоянии стальных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 3. – С. 88–91.
7. Гусейнова С. В., Дибиргаджиев А. М., Муртазалиев Г. М. Возможные постановки задач потери устойчивости конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2014. – 35(4). – С. 113–118. <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118>
8. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. – 1954. – Т. 6, № 2. – С. 140–146.
9. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Об устойчивости полосы при сжатии // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049.
10. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. – М. : Научная книга. – 2006. – 236 с.
11. Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I. Investigation of Quasi-Static Deflection of an Elastic Plate Made of Inhomogeneous Material under Compression // Mech. Solids. – 2024ю – 59 (7). – P. 3811–3817. DOI:10.1134/S0025654424606578
12. Darinskiy V. S., Sapronov Yu., Tsarev S. Bifurcations of extremals of Fredholm functionals // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 145. – P. 5311–5453. doi: 10.1007/s10958-007-0356-2.
13. Thuy Van Tran Thi, Vuong Pham Ngoc, Minayeva N. V., Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip // Civil Engineering and Architecture. – 2025. – Vol. 13, No 3. – P. 1509–1516. DOI: 10.13189/cea.2025.130306.

ГЕМИТРОПНЫЕ ИНВАРИАНТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

М. Н. Михин¹, Е. В. Мурашкин², Ю. Н. Радаев²

¹Филиал Российского государственного гуманитарного университета

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. Статья посвящена проблеме построения полных неприводимых систем рациональных алгебраических гемитропных инвариантов/полуинвариантов третьего, четвертого, пятого и шестого алгебраических порядков, для определяющих тензоров, задающих энергетическую форму гемитропного микрополярного тела. Предложен алгоритм получения указанных систем инвариантов, основанный на присоединении к исходным инвариантам новых инвариантов, составленных из допустимых произведений инвариантов более низких порядков. Актуальность настоящей работы обусловлена необходимостью адекватного моделирования материалов со сложной внутренней микроструктурой, в тех случаях, когда классические модели механики сплошных сред неприменимы. Полученные результаты позволяют найти канонические формы потенциала силовых и моментных напряжений и соответствующие определяющие уравнения.

Ключевые слова: потенциал силовых и моментных напряжений, алгебраический инвариант, гемитропный инвариант, асимметричный тензор деформации, тензор изгиба-кручения.

Введение

Механика континуума сталкивается с необходимостью разработки математических моделей, адекватно представляющих материалы со сложной внутренней микроструктурой. Особый интерес в плане математического моделирования представляют гемитропные микрополярные среды, характеризующиеся наличием моментных напряжений и являющихся чувствительными к зеркальным отражениям пространства. Выбор потенциалов для таких сред требует применения аппарата целых рациональных алгебраических инвариантов, где подходящие степени инвариантов играют ключевую роль в аппроксимациях энергетических потенциалов. Заметим, что с помощью гемитропного потенциала простым дифференцированием можно определить силовые и моментные напряжения [1–6].

В настоящей работе проводится построение полной системы алгебраических инвариантов третьего, четвертого, пятого и шестого порядков. Предложен алгоритм построения полных систем инвариантов высших порядков, согласно которому к исходным неприводимым инвариантам (которые представляют собой инвариантные следы [7, 8]) добавляются произведения инвариантов более низких степеней однородности. В книге [7] установлен набор из 86 неприводимых исходных инвариантов для системы двух симметричных и двух антисимметричных тензоров.

В настоящей работе использована следующая терминология. Индивидуальный инвариант — любой след, в записи которого фигурирует только одна тензорная литера. Совместный инвариант — любой след, в записи которого фигурируют не менее двух тензорных литер.

Неприводимый инвариант в заданной системе — инвариант, который не может быть выражен в виде полиномиальной комбинации других инвариантов той же системы. Если из неприводимых инвариантов удастся составить полную конечную систему, то можно вести речь о базисе в множестве инвариантов.

1. Алгебраические инварианты для гемитропного микрополярного тела

Рассмотрим систему, состоящую из четырех тензоров второго ранга: симметричные тензоры **A** и **B**, а также антисимметричные тензоры **V** и **W**.

Полная система инвариантов первого порядка содержит всего два инвариантных следа:

$$\text{tr} [\mathbf{A}], \text{tr} [\mathbf{B}].$$

Полная неприводимая система инвариантов второго порядка содержит 9 инвариантов: шесть исходных инвариантов второго порядка и три инварианта, получающихся из всевозможных произведений инвариантов первого порядка.

Для построения полной систем инвариантов третьего порядка к 12 исходным инвариантам третьей степени необходимо добавить 16 инвариантов, которые получаются путем умножения инвариантов второго порядка на каждый из инвариантов первого порядка (исключив при этом совпадения).

Таким образом, полная система инвариантов третьего порядка содержит $12 + 16 = 28$ инвариантов.

Для построения полной систем инвариантов четвертого порядка к 19 исходным инвариантам четвертой степени необходимо присоединить следующие две непересекающиеся группы инвариантов:

1) Группа из 47 инвариантов, составленных из произведений каждого из инвариантов третьего порядка на каждый из двух инвариантов первого порядка.

2) Группа из 21 инварианта, которые составлены из попарных произведений 6 исходных инвариантов второй степени.

Таким образом, полная неприводимая система инвариантов четвертого порядка содержит $19 + 47 + 21 = 87$ инвариантов.

Для построения полной систем инвариантов пятого порядка к 24 исходным инвариантам пятой степени необходимо присоединить следующие две непересекающиеся группы инвариантов:

1) Группа из 146 инвариантов, получаемых путем умножения каждого из 87 инвариантов четвертого порядка на каждый из двух инвариантов первого порядка.

2) Группа, получающаяся путем умножения каждого из 6 исходных инвариантов второй степени на каждый из 12 исходных инвариантов третьей степени. Тем самым формируется группа из 72 инвариантов.

Таким образом, полная неприводимая система инвариантов пятого порядка содержит $24 + 146 + 72 = 242$ инварианта.

Для построения полной систем инвариантов шестого порядка к 23 исходным инвариантам шестой степени необходимо присоединить следующие четыре непересекающиеся группы инвариантов:

1) Группа из 397 инвариантов, получаемых путем умножения каждого из 242 инвариантов пятого порядка на каждый их двух исходных инвариантов первого порядка.

2) Группа из 78 инвариантов, составленных из попарных произведений 12 исходных инвариантов третьей степени.

3) Группа, получающаяся, путем умножения каждого из 6 исходных инвариантов второй степени на 19 исходных инвариантов четвертой степени. Тем самым формируется группа из 72 инвариантов.

4) Группа из 56 инвариантов, составленных из произведений трех из шести (с повторениями, порядок не важен) исходных инвариантов второй степени.

Таким образом, полная неприводимая система шестого пятого порядка содержит $23 + 397 + 78 + 114 + 56 = 668$ инвариантов.

2. Микрополярные потенциалы силовых и моментных напряжений

Микрополярное тело называется гемитропным/гиротропным [6], если компоненты определяющих тензоров не изменяются при любых поворотах, но изменяются при зеркальных отражениях пространства. Исходными кинематическими переменными микрополярной теории выступают трансляционные перемещения u_j и микроповороты ϕ^k . В настоящей статье u_j и ϕ^k — абсолютные вектора.

Используя трансляционные перемещения и микроповороты, можно показать, что асимметричный тензор деформаций ϵ_{ij} и асимметричный тензор изгиба кручения $\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}$ вычисляются по формулам:

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk} \phi^k, \quad \kappa_{i\cdot}^{\cdot s} = \nabla_i \phi^s,$$

где e_{ijk} — альтернируемый (дискриминантный) тензор, ∇_j — оператор ковариантного дифференцирования по пространственной координате x^j .

Введем микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} [9, 10]:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}).$$

При этом выполняются следующие определяющие уравнения

$$t^{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_{i\cdot}^{\cdot s} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{i\cdot}^{\cdot s}},$$

где t^{ij} — тензор силовых напряжений, $\mu_{i\cdot}^{\cdot s}$ — тензор моментных напряжений.

Для микрополярного упругого потенциала \mathcal{U} функциональными аргументами являются тензор деформации ϵ и тензор изгиба-кручения κ . Поскольку оба этих тензора в общем случае несимметричны, их можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$\epsilon = \text{sym } \epsilon + \text{asym } \epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^T) + \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon^T),$$

$$\kappa = \text{sym } \kappa + \text{asym } \kappa = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^T) + \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^T).$$

Результаты раздела 1 могут быть сразу применимы, если положить

$$\mathbf{A} = \text{sym } \epsilon, \quad \mathbf{B} = \text{sym } \kappa,$$

$$\mathbf{V} = \text{asym } \epsilon, \quad \mathbf{W} = \text{asym } \kappa.$$

3. Пример: аппроксимация третьей алгебраической степени микрополярного упругого потенциала

Ограничимся рассмотрением гемитропных неприводимых исходных инвариантов не выше третьего порядка. Упорядоченный набор таких инвариантов, которые пронумерованы согласно [11] приведен в табл. 1.

Таблица 1

Схема нумерации инвариантов степени не выше третьей

№	Инвариант	№	Инвариант	№	Инвариант	№	Инвариант
1	$\text{tr} [\mathbf{A}]$	6	$\text{tr} [\mathbf{W}^2]$	11	$\text{tr} [\mathbf{AB}^2]$	16	$\text{tr} [\mathbf{W}^2 \mathbf{B}]$
2	$\text{tr} [\mathbf{B}]$	7	$\text{tr} [\mathbf{AB}]$	12	$\text{tr} [\mathbf{BA}^2]$	17	$\text{tr} [\mathbf{VAB}]$
3	$\text{tr} [\mathbf{A}^2]$	8	$\text{tr} [\mathbf{VW}]$	13	$\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{A}]$	18	$\text{tr} [\mathbf{WAB}]$
4	$\text{tr} [\mathbf{B}^2]$	9	$\text{tr} [\mathbf{A}^3]$	14	$\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{B}]$	19	$\text{tr} [\mathbf{VWA}]$
5	$\text{tr} [\mathbf{V}^2]$	10	$\text{tr} [\mathbf{B}^3]$	15	$\text{tr} [\mathbf{W}^2 \mathbf{A}]$	20	$\text{tr} [\mathbf{VWB}]$

С помощью табл. 1 находим, что полная неприводимая система инвариантов второго порядка, состоит из шести исходных инвариантов второго порядка и трех инвариантов, получающихся из всевозможных произведений исходных инвариантов первого порядка. В результате можно построить табл. 2.

Таблица 2

Полная неприводимая система инвариантов второго порядка

№	Инвариант	№	Инвариант	№	Инвариант
1	${}^2I_1 = (\text{tr} [\mathbf{A}])^2$	4	${}^2I_4 = \text{tr} [\mathbf{A}^2]$	7	${}^2I_7 = \text{tr} [\mathbf{W}^2]$
2	${}^2I_2 = \text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{B}]$	5	${}^2I_5 = \text{tr} [\mathbf{B}^2]$	8	${}^2I_8 = \text{tr} [\mathbf{AB}]$
3	${}^2I_3 = (\text{tr} [\mathbf{B}])^2$	6	${}^2I_6 = \text{tr} [\mathbf{V}^2]$	9	${}^2I_9 = \text{tr} [\mathbf{VW}]$

Следует отметить, что 2I_2 , 2I_8 , 2I_9 являются на самом деле полуинвариантами, поскольку тензор изгиба кручения можно трактовать как псевдотензор нечетного веса ± 1 .

Перейдем к построению полной систем инвариантов третьего порядка. Двенадцать исходных инвариантов третьей степени представлены в табл. 1 (9–20 элементы).

Построим инварианты, которые необходимо присоединить к исходным инвариантам. Для этого продумаем следующие действия: умножим каждый из вариантов второго порядка на каждый из вариантов первого порядка, затем проверим полученные инварианты на наличие совпадений.

Произведения инвариантов второго порядка на каждый из исходных инвариантов первого порядка представлены в табл. 3.

Таблица 3

Произведения инвариантов второго и первого порядков

Инварианты второго порядка	Произведение инвариантов второго порядка на $\text{tr} [\mathbf{A}]$	Произведение инвариантов второго порядка на $\text{tr} [\mathbf{B}]$
$(\text{tr} [\mathbf{A}])^2$	$\text{tr} [\mathbf{A}](\text{tr} [\mathbf{A}])^2 = (\text{tr} [\mathbf{A}])^3$	$\text{tr} [\mathbf{B}](\text{tr} [\mathbf{A}])^2 = (\text{tr} [\mathbf{A}])^2 \text{tr} [\mathbf{B}]$
$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{B}]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{B}] = (\text{tr} [\mathbf{A}])^2 \text{tr} [\mathbf{B}]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{B}] = \text{tr} [\mathbf{A}](\text{tr} [\mathbf{B}])^2$
$(\text{tr} [\mathbf{B}])^2$	$\text{tr} [\mathbf{A}](\text{tr} [\mathbf{B}])^2$	$\text{tr} [\mathbf{B}](\text{tr} [\mathbf{B}])^2 = (\text{tr} [\mathbf{B}])^3$
$\text{tr} [\mathbf{A}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{A}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{A}^2]$
$\text{tr} [\mathbf{B}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{B}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{B}^2]$
$\text{tr} [\mathbf{V}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{V}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{V}^2]$
$\text{tr} [\mathbf{W}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{W}^2]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{W}^2]$
$\text{tr} [\mathbf{AB}]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{AB}]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{AB}]$
$\text{tr} [\mathbf{VW}]$	$\text{tr} [\mathbf{A}]\text{tr} [\mathbf{VW}]$	$\text{tr} [\mathbf{B}]\text{tr} [\mathbf{VW}]$

Сравнивая второй и третий столбцы табл. 3, находим два совпадающих элемента:

$$(\text{tr} [\mathbf{A}])^2 \text{tr} [\mathbf{B}] \text{ и } \text{tr} [\mathbf{A}](\text{tr} [\mathbf{B}])^2.$$

Поэтому итоговый набор состоит из 12 исходных и $9 \cdot 2 - 2 = 16$ инвариантов, сформированных путем умножения вариантов второго порядка на каждый из исходных инвариантов первого порядка за вычетом совпадающих инвариантов. Полная система инвариантов третьего порядка приведена в табл. 4 [12, 13].

Используя полные системы инвариантов второй и третьей степени [11–13], можно уточнить потенциал гемитропного микрополярного тела с помощью кубической аппроксимации.

Уточненную аппроксимацию микрополярного упругого потенциала \mathcal{U} можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{U} = \sum_{k=1}^9 {}^2C_k {}^2I_k + \sum_{l=1}^{28} {}^3C_l {}^3\mathfrak{J}_l,$$

где 2I_k и ${}^3\mathfrak{J}_l$ — квадратичные и кубические неприводимые инварианты, 2C_k и 3C_l соответствующие определяющие постоянные квадратичного и кубического приближений [11].

Часть определяющих постоянных будут чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Это объясняется тем, что вектор микроповорота ϕ^k , с которым они связаны, на самом деле является псевдовектором (веса ± 1) и меняет знак при зеркальных отражениях.

Аналогичным образом могут быть получены аппроксимации четвертой, пятой и шестой степеней, с использованием 87 инвариантов четвертого порядка, 242 инвариантов пятого порядка и 668 инвариантов шестого порядка.

Заключение и выводы

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Для систем из четырех тензоров (двух симметричных и двух антисимметричных) в трехмерном пространстве определены полные системы алгебраических инвариантов третьего, четвертого, пятого и шестого алгебраических порядков.

2. Указан алгоритм построения полных систем инвариантов третьего, четвертого, пятого и шестого порядков, основанный на присоединении к исходным инвариантам новых инвариантов, которые формируются из допустимых произведений инвариантов более низких порядков.

3. В рамках модели гемитропного микрополярного тела получено разложение потенциала силовых и моментных напряжений, учитывающее слагаемые третьего порядка. В результате микрополярный потенциал силовых и моментных напряжений характеризуется 37 определяющими модулями.

4. Полученные результаты могут быть использованы при построении моделей нелинейных гемитропных микрополярных сред в плане уточнения определяющих уравнений [11–13].

Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124013000674-0).

Литература

1. *Cosserat E. Théorie des corps déformables* / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.
2. *Gunther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums* / W. Gunther // *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. – 1958. – Bd. 10. – S. 195–213.
3. *Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums* / S. Kessel // *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. – 1964. – Bd. 16. – S. 1–22.
4. *Neuber H. On the General Solution of Linear-Elastic Problems in Isotropic and Anisotropic Cosserat Continua* / H. Neuber // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. – Berlin; Heidelberg; Springer, 1966. – P. 153–158.

5. *Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity / W. Nowacki. – Berlin : Springer, 1972. – 483 p.*
6. *Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 504–517.*
7. *Спенсер Э. Теория инвариантов / Э. Спенсер; пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 223 с.*
8. *Spencer A. J. M. Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second-Order Tensors: Part II / A. J. M. Spencer // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – Vol. 18, No 1. – P. 51–82.*
9. *Радаев Ю. Н. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред / Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412.*
10. *Мурашкин Е. В. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 4(54). – С. 108–115.*
11. *Мурашкин Е. В. Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2025. – Т 29, № 3. – С. 472–485*
12. *Murashkin E. V. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела / E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 29, No. 2. – P. 207–219.*
13. *Murashkin E. V. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid / E. V. Murashkin, Y. N. Radayev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. – Vol. 46, No 5. – P. 2391–2400.*

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ПЛАСТИЧЕСКИМИ И ВЯЗКИМИ СВОЙСТВАМИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Г. Л. Панченко

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Аннотация. В рамках модели больших деформаций рассматриваются неизоотермические краевые задачи о деформировании материалов, обладающих упругими, пластическими и вязкими свойствами в случае цилиндрической симметрии. В постановках задач используются различные граничные условия. В начале процесса деформирования, пока прикладываемые нагрузки еще небольшие, материал деформируется обратимо или может проявлять вязкие свойства в виде ползучести. На стадии пластического течения во всех представленных задачах учитываются вязкие свойства деформируемых материалов. Предполагается связанность теплофизических и деформационных процессов. Параметры ползучести, предел текучести и коэффициент вязкости принимаются зависимыми от температуры.

Ключевые слова: упругость, вязкоупругость, обратимые деформации, необратимые деформации, вязкопластическое течение, большие деформации, ползучесть, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

Введение

В процессах механической обработки давлением материалы подвергаются значительным нагружающим усилиям для придания им нужной формы. В этих процессах происходит значительное накопление необратимых деформаций в материале. Поэтому при построении математических моделей таких процессов необходимо учитывать большие деформации материалов. Также обрабатываемый материал при движении может тереться об ограничивающие его поверхности и вследствие этого нагреваться. Нагревание материала происходит и в результате накопления им необратимых деформаций. В данной работе представлены различные постановки краевых задач необратимого деформирования материалов с использованием модели больших упругопластических деформаций [1]. В этой модели для обратимых и необратимых деформаций формулируются дифференциальные уравнения их изменения. В работе [2] сделано обобщение этой модели на неизоотермический случай и случай учета явления вязкости при пластическом течении. Включение в модель процесса ползучести, а также рассмотрение проблемы согласования законов ползучести и пластического течения проведено в [3].

1. Деформирование среды под действием переменного перепада давления

Пусть несжимаемый материал, обладающий упругими, вязкими и пластическими свойствами помещен в круглую жесткую трубу радиуса R . Деформирование материала и его продвижение по трубе происходит из-за приложения изменяющегося со временем перепада давления. В цилиндрической системе координат r , φ , z граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -p(t), \quad p(0) = 0, \quad (1)$$

где σ_{zz} — компонента тензора напряжений, функция $p(t)$ — монотонно возрастающая. Считаем, что материал обратимо деформируется в условиях отсутствия перемещений на границе с трубой $r = R$ до тех пор, пока на этой границе выполняется неравенство

$$|\sigma_{rz}| - s_0 < 0, \quad (2)$$

в котором s_0 — задаваемая постоянная сухого трения.

При увеличении нагрузки в некоторый момент времени $t = t_1$ неравенство (2) перестает выполняться и материал начинает проскальзывать вдоль стенки трубы. Поэтому неравенство (2) заменим условием

$$|\sigma_{rz}| - s_0 - \xi v = 0. \quad (3)$$

Здесь ξ — коэффициент вязкого трения, v — отличная от нуля компонента вектора скорости. Трение материала о шероховатую стенку трубы вызывает его разогрев. Для формирующегося поля температур примем следующие условия

$$\theta(r, t_1) = 0, \quad \partial\theta(r, t)/\partial r|_{r=0} = 0, \quad \theta(r, t)|_{r=R} = \gamma_1 u(r, t)|_{r=R}, \quad (4)$$

где $\theta = (T - T_0)T_0^{-1}$, T , T_0 — текущая температура и температура тела в свободном состоянии, γ_1 — постоянная теплопроизводства за счет трения, u — отличная от нуля компонента вектора перемещений.

Дальнейший рост перепада давления приводит к выполнению на границе $r = R$ обобщенного условия пластического течения Треска — Сен-Венана [4]

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (5)$$

в котором ε_{ij}^p , ε_k^p — компоненты тензора скоростей пластических деформаций и его главные значения соответственно; k — предел текучести; σ_i — главные значения тензора напряжений; η — коэффициент вязкости. Для предела текучести и коэффициента вязкости примем следующие зависимости от температуры [5]

$$k = k_0(1 - \theta\theta_m^{-1})^2, \quad \eta = \eta_0 \text{Exp}(-\nu T_0\theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0)T_0^{-1}. \quad (6)$$

В (6) T_m — температура плавления материала, k_0 , η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, ν — экспоненциальная скорость.

2. Деформирование материала пробки в условиях прилипания под действием переменного перепада давления с учетом ползучести

Рассмотрим пробку конечной длины l , которую образует несжимаемый упруговязкопластический материал в круглой трубе радиуса R с недеформируемыми стенками. Боковая поверхность пробки находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы

$$u|_{r=R} = 0, \quad v|_{r=R} = 0,$$

а верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным перепадом давления

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (7)$$

где $r = 0$ — координата максимального перемещения граничных точек пробки. Согласно второму условию (7) принимается, что сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r = 0$ отсутствует, хотя его можно задать и не равной нулю постоянной величиной.

Пока нагружающее давление $p(t)$ невелико, необратимые деформации накапливаются в материале пробки в результате медленного процесса ползучести. Учет этого процесса в модели осуществляется с помощью степенного закона ползучести Нортонa [6]

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (8)$$

в котором $V(\sigma_{ij})$ — термодинамический потенциал; ε_{ij}^v — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; B , n — параметры ползучести материала. Для параметров ползучести примем следующие зависимости [7]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0(1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0(1+\theta)}, \quad \theta = (T - T_0)T_0^{-1}. \quad (9)$$

Здесь c_1 , σ_0 , b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная.

Необратимое деформирование материала вызывает в нем рост температуры, для которой примем условия

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (10)$$

Условие (10) означает отсутствие дополнительного притока тепла извне, так как целью исследования являлось отслеживание уровня нагрева материала только за счет процессов необратимого деформирования.

Дальнейший рост нагружающих усилий приводит к выполнению условия пластического течения (5), (6) на границе трубы $r = R$.

3. Деформирование материала пробки под действием переменного перепада давления с учетом проскальзывания и ползучести

Также, как и в разделе 2, рассматривается материал, составляющий пробку конечной длины l в круглой трубе радиуса R . На поперечных границах пробки заданы условия (7). В отличие от предыдущей задачи, материал пробки может проскальзывать в окрестности жесткой стенки трубы $r = R$.

Пока значение давления невелико, на границе $r = R$ выполняется неравенство (2) и материал удерживается в состоянии прилипания к стенке трубы за счет сухого трения. В материале в это время накапливаются необратимые деформации ползучести по закону (8), (9). Необратимое деформирование вызывает рост температуры в материале, для которой примем условия

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta(R, t) = 0. \quad (11)$$

Далее с ростом функции $p(t)$ в некоторый момент времени $t = t_1$ неравенство (2) при $r = R$ перестает выполняться и вместо него используем условие проскальзывания (3). С этого момента времени материал начинает двигаться и тереться о стенку трубы. Трение вызывает разогрев материала, поэтому третье условие (11) поменяется на третье условие (4).

В последующий момент времени $t = t_2$ на границе $r = R$ начнется вязкопластическое течение материала пробки, для описания которого также используем соотношения (5) и (6).

4. Деформирование упруговязкопластической среды в трубе при наличии слоя смазки

Рассмотрим задачу о деформировании упруговязкопластического материала и смазки, расположенных в круглой недеформируемой трубе радиуса R . Считаем, что основной материал занимает область $0 \leq r \leq r_1$, а смазка — область $r_1 \leq r \leq R$. Основной материал и смазка имеют разные термомеханические параметры. Полагаем непрерывность перемещений на границе соприкосновения основного материала и смазки $r = r_1$. Деформирование материалов в трубе происходит под действием переменного перепада давления (1), и пока он невелик материалы деформируются обратимо. Также предполагаем, что материал смазки удерживается в состоя-

нии прилипания к стенке трубы, пока остается верным неравенство (2). С ростом нагружающих усилий в момент времени $t = t_1$ неравенство (2) обращается в равенство, и смазка начинает проскальзывать вдоль стенки трубы, а значит и разогреваться. С этого момента времени принимаем условие (3), а для растущей температуры условия

$$\theta(r, t_1) = 0, \quad \theta(r, t)|_{r=R} = \gamma_1 u(r, t)|_{r=R}, \quad \partial\theta(r, t)/\partial r|_{r=0} = 0, \quad [\theta(r, t)]|_{r=r_1} = 0, \quad [q]|_{r=r_1} = 0. \quad (12)$$

В (12) $q = q_z(r, t) = -\lambda_i T_0 \partial\theta(r, t)/\partial r$ — отличная от нуля компонента вектора теплового потока, λ_i — коэффициенты теплопроводности материала ($i = 1$) и смазки ($i = 2$). Квадратными скобками обозначен скачок функции. Последними двумя условиями (12) принимается непрерывность температуры и теплового потока между основным материалом и смазкой.

В момент времени $t = t_2$ на границе $r = R$ начинается вязкопластическое течение смазки, описываемое формулами (5) и (6). Дальнейшее увеличение нагрузки приводит в последующем к возникновению и распространению вязкопластического течения и в основном материале.

Заключение

В исследовании получены численные решения ряда неизоотермических краевых задач о деформировании материалов, помещенных в круглую недеформируемую трубу. К материалам прикладывается переменный перепад давления. Повышение температуры материалов происходит из-за процесса накопления необратимых деформаций, а также почти во всех задачах вследствие их трения о шероховатую стенку трубы. Все задачи решены в квазистатической постановке. Дополнительно предполагалось, что температура в процессе деформирования не достигала температуры плавления.

В задаче 1 рассмотрены следующие процессы: обратимое деформирование материала; его вязкопластическое течение при возрастающем, постоянном и убывающем перепаде давления; торможение течения при убывающем перепаде давления; разгрузка и остывание материала при полном снятии нагружающих усилий. В задачах 2 и 3 рассмотрены процессы: ползучесть материала при возрастающей нагрузке, пластическое течение при возрастающей и постоянной нагрузке, торможение течения при убывающем нагружении, разгрузка и остывание. В задаче 3 также рассмотрен процесс развития течения при убывающем перепаде давления. В задаче 4 рассмотрены следующие этапы процесса деформирования: обратимое деформирование; возникновение и развитие вязкопластического течения в смазке, а затем и в основном материале при возрастающем перепаде давления; вязкопластическое течение в смазке и в материале при постоянном перепаде давления; торможение течения при убывающем перепаде давления; разгрузка и остывание.

Все рассмотренные задачи сводятся к системам дифференциальных уравнений в частных производных, для решения которых были разработаны алгоритмы на основе конечно-разностного метода.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFWF-2021-0005, FFWF-2025-0002).

Литература

1. Буренин А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.

2. Ковтанюк Л. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук. – 2006. – № 4. – С. 87–93.

3. Бегун А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470, № 3. – С. 275–278.

4. Ишлинский А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.

5. Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238, Iss. 5. – P. 572–580.

6. Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures / F. H. Norton. – New York : McGraw Hill Book Company, 1929. – 110 p.

7. Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201–3206.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

О. С. Перова, И. М. Лавит

Тульский государственный университет

Аннотация. Рассматривается плоская задача линейной механики разрушения для прямоугольной области с центральной прямолинейной трещиной. В дополнение к коэффициенту интенсивности напряжений определяется Т-напряжение, имеющее конечное и отличное от нуля значение в кончике трещины. Решение задачи ищется методом конечных элементов. Необходимость вычисления Т-напряжения предъясвляет повышенные требования к точности решения задачи. С этой целью в дополнение к обычным функциям формы конечных элементов вводятся координатные функции, моделирующие сингулярность поля напряжений в кончике трещины. Для согласования с главными граничными условиями в качестве таких функций используется аналитическое решение этой же задачи для бесконечной области. Результаты расчетов сопоставляются с данными других исследователей.

Ключевые слова: разрушение, трещина, метод конечных элементов, метод Ритца — Галеркина, Т-напряжение.

Введение

В последние десятилетия критерии роста трещины, использующие коэффициенты интенсивности напряжений, дополняются за счет учета несингулярных составляющих тензора напряжений в окрестности кончика трещины [1, 2]. Для их вычисления, так же, как и для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений, используются различные численные методы [1], среди которых наиболее универсальным, простым и надежным является метод конечных элементов [3, 4]. Но функции формы обычных конечных элементов — это многочлены невысокого порядка. Поэтому точность аппроксимации полей напряжений в окрестности кончика трещины — особой точки такими элементами невысока. Необходимо модифицировать метод конечных элементов, чтобы правильно моделировать асимптотику поля напряжений. Одна из таких модификаций представлена ниже. Ее суть в том, что функции, моделирующие сингулярность, добавляются во все конечные элементы. Эти функции одни и те же. Тем самым обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. При этом конечные элементы могут быть любыми. Этот метод можно рассматривать как комбинацию классического метода конечных элементов и классического метода Ритца — Галеркина [4]. Координатные функции включают в себя как функции с компактными носителями — конечными элементами, так и функции, имеющие единое аналитическое выражение во всей области.

Область применения метода охватывает практически все квазистатические задачи механики разрушения, в том числе и для криволинейных трещин. Но чтобы убедиться в точности метода и изучить его возможности, нужно рассмотреть фундаментальные задачи. Решение одной из них — задачи о растягиваемой прямоугольной области, ослабленной центральной трещиной, представлено ниже.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская деформация линейно упругого тела [5]. Поперечное сечение тела S , ограниченное контуром L , изображено на рис. 1. Сечение ослаблено прямолинейной тре-

щиной длиной a . К контуру сечения приложена распределенная нагрузка \mathbf{p} . Кромки трещины предполагаются ненагруженными. Сечение и нагрузка симметричны относительно оси абсцисс. Таким образом, исследуемая трещина относится к типу трещин нормального разрыва [6]. Так как ось абсцисс является осью симметрии задачи, ниже рассматривается только верхняя часть поперечного сечения $y \geq 0$.

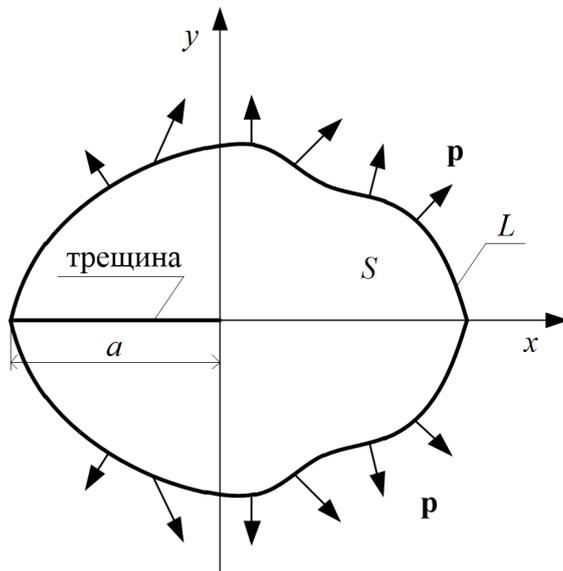


Рис. 1. Поперечное сечение тела

Математическая модель основана на известных соотношениях теории упругости, записываемых как [5]:

$$\begin{aligned} \partial_m \sigma_{km} &= 0; \quad \varepsilon_{km} = (\partial_k u_m + \partial_m u_k) / 2; \\ \sigma_{km} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \varepsilon_{ii} \delta_{km} + (1-2\nu) \varepsilon_{km}]; \quad i, k, m = 1, 2; \quad \partial_k = \partial / \partial x_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_k(x_m)$ — поле перемещений, ε_{km} — тензор деформаций, σ_{km} — тензор напряжений, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, δ_{km} — символ Кронекера. Далее будем также использовать следующие обозначения:

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad u = u_1; \quad v = u_2. \quad (2)$$

Решение уравнения равновесия (первое уравнение системы (1)) должно удовлетворять граничным условиям. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (статическими) [1, 2].

Пусть r, θ — полярные координаты точки:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta. \quad (3)$$

В окрестности кончика трещины ($r \rightarrow 0$) напряжения представляются в виде:

$$\sigma_{km} = \sigma_{km}^{(0)} + \sigma_{km}^{(1)} + O(\sqrt{r}), \quad (4)$$

где $\sigma_{km}^{(0)}$ — сингулярные составляющие тензора напряжений, $\sigma_{km}^{(1)}$ — несингулярные составляющие, отличные от нуля в кончике трещины. Напряжения $\sigma_{km}^{(0)}$ и соответствующие им деформации и перемещения записываются в виде [6]:

$$\sigma_{km}^{(0)} = K_I \sigma_{km}^*; \quad u_k^{(0)} = K_I u_k^*; \quad \varepsilon_{km}^{(0)} = K_I \varepsilon_{km}^*, \quad (5)$$

где величины, помеченные звездочкой, известны. Вследствие непрерывности напряжений $\sigma_{km}^{(1)}$ получается:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{11}^{(1)} = T, \quad (6)$$

где величина T , называемая T -напряжением [1, 2], определяется в процессе решения задачи. Для оценки несингулярных напряжений в кончике трещины Ливерс и Радон [7] предложили безразмерный параметр B , названный ими двухосевым отношением:

$$B = T\sqrt{\pi a}/K_I. \quad (7)$$

Таким образом, целью решения задачи является определение K_I и B .

2. Метод решения задачи

Слабое решение задачи [4] получается из принципа виртуальных работ [5]:

$$\int_S \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km} dS = \int_L p_k \delta u_k dL, \quad (8)$$

где δ — символ вариации. Уравнение (8) эквивалентно уравнению равновесия (1) и естественным граничным условиям. Решение уравнения (8) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

Для решения задачи используется метод конечных элементов. В данном исследовании использовались изопараметрические конечные элементы первого порядка, которые в глобальных координатах x , y представляют собой произвольные выпуклые четырехугольники [3]. В локальных координатах ξ , η все элементы одинаковы (рис. 2).

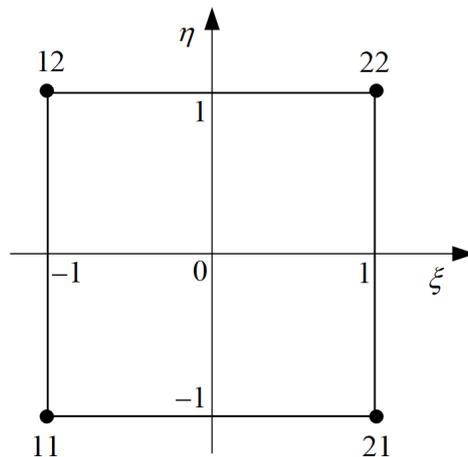


Рис. 2. Конечный элемент в локальных координатах — квадрат. Узлы имеют двойную нумерацию

Рассмотрим интегрирование в уравнении (8) по одному элементу. Глобальные координаты точек элемента определяются формулами:

$$x = L_i(\xi)L_j(\eta)X_{ij}; \quad y = L_i(\xi)L_j(\eta)Y_{ij}; \quad (9)$$

$$i, j = 1, 2; \quad \xi, \eta \in [-1, 1],$$

где X_{ij}, Y_{ij} — известные глобальные координаты узла с номером ij , $L_i(\zeta)$ — интерполяционные полиномы Лагранжа, которые в данном случае имеют вид:

$$L_1(\zeta) = 0.5(1 - \zeta); \quad L_2(\zeta) = 0.5(1 + \zeta); \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Для перемещений точек элемента используются те же функции формы, что и для координат. Но для точного моделирования асимптотик перемещений и напряжений к ним добавляются составляющие, определенные равенствами (5). Таким образом, получаем:

$$u = L_i(\xi)L_j(\eta)U_{ij} + K_I u^*; \quad v = L_i(\xi)L_j(\eta)V_{ij} + K_I v^*. \quad (11)$$

Вторые слагаемые добавляются в выражения перемещений во все конечные элементы. За счет этого обеспечивается межэлементная непрерывность поля перемещений. Конечно, теперь величины U_{ij}, V_{ij} не являются узловыми перемещениями. Это просто неизвестные коэффициенты при координатных функциях. К ним добавляется еще и коэффициент K_I . Приведенных соотношений достаточно, чтобы выполнить интегрирование уравнения (8) по элементу. Суммирование вкладов всех конечных элементов и переход к глобальной нумерации переменных приводит левую часть уравнения (8) к виду:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}; \quad \mathbf{Z} = [z_m]; \quad \mathbf{A} = [a_{km}]; \quad k, m = 1, \dots, N+1; \quad N = 2M; \quad z_{N+1} = K_I. \quad (12)$$

где \mathbf{Z} — матрица-столбец искоемых неизвестных, \mathbf{A} — глобальная матрица жесткости, M — число узлов конечноэлементной сетки, индекс T обозначает транспонирование. Матрица \mathbf{A} симметрична и положительно определена. Если бы не было последних строки и столбца, она была бы ленточной.

Аналогично находится вклад одного конечного элемента в правую часть уравнения (8). Очевидно, что ненулевой вклад дают только те элементы, стороны которых лежат на части граничного контура, где приложена нагрузка. В результате суммирования по элементам и переходу к глобальной нумерации получается матрица-столбец свободных членов $\mathbf{Q} = [q_m]$, $m = 1, \dots, N+1$. Уравнение (8) принимает вид:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}. \quad (13)$$

Необходимо учесть главные граничные условия. Для рассматриваемой задачи можно выбрать функции (5) так, чтобы они удовлетворяли главным граничным условиям (см. ниже). Поэтому главные граничные условия (в рассматриваемой задаче они нулевые) удовлетворяются методом, приведенным в работе [3], без каких-либо изменений. Пусть, например, j -е узловое перемещение должно быть нулевым. Обнуляются j -я строка и j -й столбец матрицы \mathbf{A} за исключением диагонального элемента, а также j -й элемент матрицы правых частей \mathbf{Q} . После всех таких видоизменений матриц \mathbf{A} и \mathbf{Q} вариационное равенство (13) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\delta \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} = \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{Q}. \quad (14)$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_I находится в результате решения системы уравнений (14), а несингулярные составляющие тензора напряжений вычисляются, после решения этой системы, по обычным соотношениям метода конечных элементов. Пусть кончик трещины совпадает с каким-либо узлом конечноэлементной сетки. Этот узел входит в два конечных элемента. Обозначим их через «+» и «-». Пусть $\sigma_{xx}^{(+)}$ представляет собой несингулярное напряжение в кончике трещины для одного элемента, а $\sigma_{xx}^{(-)}$ — для другого. В качестве T -напряжения выбирается средняя величина:

$$T = 0.5(\sigma_{xx}^{(+)} + \sigma_{xx}^{(-)}). \quad (15)$$

3. Результаты расчетов

Расчетная схема прямоугольной области с центральной трещиной представлена на рис. 3. Как легко видеть, задача имеет две оси симметрии. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, изображена на рис. 4. Сформулируем граничные условия задачи. Участок контура AB (условия симметрии): $u = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе — естественным. Участок контура BC : $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = q$. Оба условия являются естественными. Участок контура CD : $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Оба условия являются естественными. Участок контура DE (условия симметрии): $v = 0$; $\sigma_{xy} = 0$. Первое условие является главным, а второе — естественным. Участок контура EA (линия трещины): $\sigma_{xy} = 0$; $\sigma_{yy} = 0$. Оба условия являются естественными.

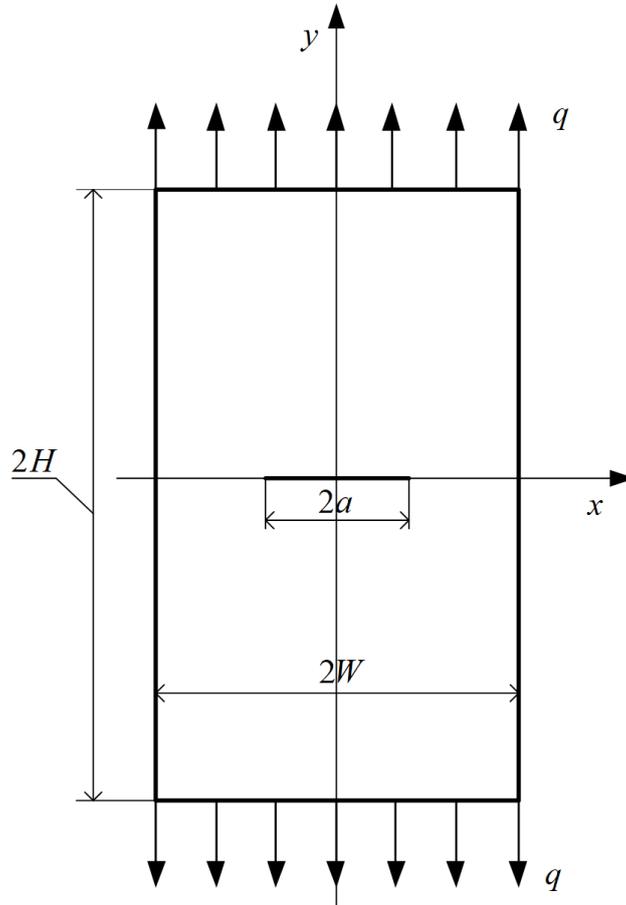


Рис. 3. Прямоугольная область с центральной трещиной

Необходимо задать соотношения (5), моделирующие сингулярность поля напряжений. Известно аналитическое решение задачи для плоскости с центральной трещиной [6], то есть при $H, W \rightarrow \infty$. Перемещения, соответствующие сингулярной части этого решения, удовлетворяют условиям симметрии и, следовательно, главным граничным условиям поставленной задачи. Поэтому в качестве координатных функций для моделирования сингулярной части численного решения можно в данном случае взять сингулярную составляющую решения задачи о трещине в плоскости [6]. Получаем следующие выражения [6]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_{yy}^* - \sigma_{xx}^* + 2i\sigma_{xy}^* = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{cases} \quad (16)$$

$$u^* + iv^* = \frac{1+\nu}{E} [(3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}];$$

$$\varphi(z) = \frac{(z^2 - a^2)^{1/2}}{2\sqrt{\pi a}}; \quad \psi(z) = -\frac{a^2}{2\sqrt{\pi a}(z^2 - a^2)^{1/2}}; \quad z = x + iy,$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — комплексные потенциалы [5], i — мнимая единица. Начало координат расположено в середине трещины (рис. 3). Черта над символом обозначает комплексное сопряжение.

Конечные элементы в глобальных координатах в данном случае — это прямоугольники. При проведении расчетов разбиение вдоль осей координат выбрано равномерным, так как неравномерность конечноэлементной сетки вносит непредсказуемую погрешность в решение задачи. Полагалось $n_1 = n_2 = n = 200$. При этом отличие результатов расчетов от результатов, полученных на сетке с $n = 150$, составляет менее 0.01 %. Результаты расчетов величины

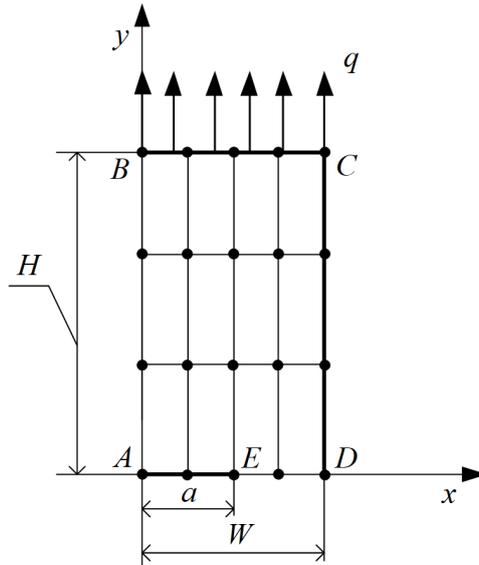


Рис. 4. Расчетная схема — верхняя четверть области, вырезанная осями симметрии. Конечные элементы — прямоугольники. Их количество в горизонтальном направлении равно n_1 (на рисунке $n_1 = 4$), их количество в вертикальном направлении равно n_2 (на рисунке $n_2 = 3$)

$K_I^* = K_I / (q\sqrt{\pi a})$ для различных длин трещины и для различных отношений H/W представлены в табл. 1. В ней курсивом показаны результаты Исиды [8]. В табл. 2 даны соответствующие значения параметра B . Курсивом показаны результаты Фетта [9]. Данные этих таблиц демонстрируют приемлемое согласие полученных результатов с результатами предшествующих исследований.

Таблица 1

Зависимость величины K_I^* от длины трещины и отношения длин сторон прямоугольной области с центральной трещиной

a/W	$H/W = 0.5$	$H/W = 1.0$	$H/W = 1.5$	$H/W = 2.0$
0.1	1.046 <i>1.046</i>	1.014 <i>1.014</i>	1.007 <i>1.007</i>	1.006
0.2	1.175 <i>1.175</i>	1.056 <i>1.055</i>	1.029 <i>1.029</i>	1.025
0.3	1.372 <i>1.371</i>	1.124 <i>1.123</i>	1.066 <i>1.066</i>	1.059
0.4	1.631 <i>1.629</i>	1.216 <i>1.216</i>	1.122 <i>1.122</i>	1.110
0.5	1.969 <i>1.967</i>	1.334 <i>1.334</i>	1.203 <i>1.203</i>	1.188
0.6	2.426 <i>2.424</i>	1.481 <i>1.481</i>	1.321 <i>1.32</i>	1.304
0.7	3.040 <i>3.04</i>	1.678 <i>1.68</i>	1.505	1.489
0.8	3.770	1.991	1.830	1.816
0.9	4.487	2.709	2.586	2.576

Таблица 2

Зависимость величины V от длины трещины и отношения длин сторон
прямоугольной области с центральной трещиной

a/W	$H/W = 0.5$	$H/W = 1.0$	$H/W = 1.5$	$H/W = 2.0$
0.1	-1.003 -1.001	-1.006 -1.007	-1.003	-1.002
0.2	-0.9817 -0.975	-1.018 -1.017	-1.010	-1.006
0.3	-0.9060 -0.892	-1.032 -1.028	-1.021	-1.015
0.4	-0.7861 -0.763	-1.042 -1.037	-1.037	-1.031
0.5	-0.6585 -0.626	-1.047 -1.038	-1.064	-1.061
0.6	-0.5560 -0.519	-1.058 -1.045	-1.113	-1.115
0.7	-0.4852 -0.440	-1.103 -1.092	-1.204	-1.213
0.8	-0.4422 -0.387	-1.255 -1.207	-1.394	-1.407
0.9	-0.6475 -0.632	-1.742 -1.581	-1.876	-1.890

Заключение

Разработанный метод представляет собой синтез классического метода конечных элементов и классического метода Ритца — Галеркина. С его помощью удастся смоделировать сингулярные составляющие тензора напряжений. Важной особенностью метода является то, что он не накладывает никаких ограничений на используемые конечные элементы.

В настоящей статье рассмотрена классическая задача вычислительной механики разрушения — задача о центральной трещине в прямоугольной области. Цель этого — в наиболее ясном изложении сути метода и демонстрации его эффективности. Метод несложно обобщить на несимметричные задачи механики разрушения. Более того, его можно применять к решению задач теории упругости для областей с концентраторами напряжений при условии, что известно аналитическое решение задачи для бесконечной области. Это решение включается в набор координатных функций численного решения. Конечность области фактически учитывается конечными элементами, как это сделано при решении рассмотренной задачи. Можно отметить также простоту метода, что особенно важно для технических приложений.

Литература

1. Gupta M. A review of T stress and its effects in fracture mechanics / M. Gupta, R. C. Alderliesten, R. Benedictus // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – Vol. 134. – P. 218–241.
2. Матвиенко Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю. Г. Матвиенко. – Москва : Физматлит, 2006. – 328 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – Москва : Мир, 1975. – 521 с.

4. *Brenner S. C.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. C. Brenner, L. R. Scott. – New York : Springer, 2008. – 397 p.
5. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва : Наука, 1975. – 576 с.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – Москва : Наука, 1974. – 640 с.
7. *Leevers P. S.* Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries / P. S. Leever, J. C. Radon // International Journal of Fracture. – 1982. – Vol. 19. – P. 311–325.
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1. / под ред. Ю. Мураками. – Москва : Мир, 1990. – 448 с.
9. *Fett T.* T-stresses in rectangular plates and circular disks / T. Fett // Engineering Fracture Mechanics. – 1998. – Vol. 60. – P. 631–652.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

Д. В. Праведников

Тульский государственный университет

Аннотация. В работе предлагается подход к моделированию распространения нестационарных температурных и механических волн в толстостенном цилиндре бесконечной длины. Такие волны могут возникать в среде, например, при ударном тепловом или силовом воздействии на его границе [1–3]. Целью данной работы является постановка задачи об распространении таких волн в толстостенном цилиндре, приведение определяющих соотношений, требуемых для решения, а также граничных условий.

Ключевые слова: постановка задачи, деформированное состояние, соотношения Дюгамеля — Неймана, теория Максвелла — Каттанео — Лыкова, распространение волн.

Введение

Для описания напряженного состояния используется тензор истинных напряжений Коши \hat{S} , с помощью которого уравнения движения точек цилиндра записываются в виде [4]

$$\overline{\nabla} + \rho \vec{F} = \rho \vec{w}, \quad (1)$$

где \hat{S} — тензор истинных напряжений Коши, определяющий внешние поверхностные силы, действующие на материальный объем в соответствии с $\vec{P} = \vec{n} \hat{S}$, \vec{n} — вектор нормали к поверхности, $\overline{\nabla}$ — набла-оператор, ρ — массовая плотность, \vec{F} — внешние массовые силы.

Для описания деформированного состояния используем тензор бесконечно малых деформаций, компоненты которого выражаются через компоненты вектора перемещений U_i в виде

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial U_i(X, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j(X, t)}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Связь напряжений, деформаций и температуры в изотропном теле определяется соотношениями Дюгамеля — Неймана, которые обобщают закон Гука на случай воздействия на тело механических нагрузок и изменяющегося температурного поля [5]:

$$\sigma_{ij}(X, t) = 2G \left[\varepsilon_{ij}(\vec{X}, t) + \frac{\mu}{1-2\mu} e(\vec{X}, t) \delta_{ij} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha_T (T(\vec{X}, t) - T_0) \delta_{ij} \right]. \quad (3)$$

Здесь G — модуль сдвига; μ — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера; α_T — коэффициент линейного теплового расширения; $T(\vec{X}, t)$ — температурная функция; $e(\vec{X}, t) = \varepsilon_{ii}(\vec{X}, t) = \text{div}[\vec{U}(\vec{X}, t)]$ — объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(\vec{X}, t) = \sigma_{ii}(\vec{X}, t)$ соотношением

$$e(X, t) = \frac{1-2\mu}{E} \sigma(\vec{X}, t) + 3\alpha_T (T(\vec{X}, t) - T_0). \quad (4)$$

1. Постановка задачи

В основе классической теории теплопроводности лежит феноменологическое уравнение Фурье, связывающее векторное поле плотности теплового потока \vec{q} со скалярным полем температуры T [3]:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T, \quad (5)$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала тела.

Согласно уравнению (5), тепловой поток распространяется в пространстве с бесконечной скоростью, поскольку изменение температуры в некоторой области мгновенно сказывается на температуре в сколь угодно удаленной от нее точке. В действительности теплота распространяется с конечной, хотя и довольно большой, скоростью, поэтому в большинстве практических задач ее можно не принимать во внимание. Однако для некоторых задач теплового удара, когда температура поверхности тела или граничащей с ней среды меняется скачкообразно, и ряда других процессов этого сделать нельзя. Недостаток закона Фурье в том, что он предсказывает бесконечную скорость теплопередачи и не учитывает время запаздывания, которое характерно для реальных процессов. Закон Максвелла — Каттанео — Лыкова (или закон Максвелла — Каттанео) является усовершенствованной моделью, которая включает в себя время запаздывания и описывает конечную скорость распространения тепла. Этот закон вводится путем добавления к уравнению Фурье дополнительного члена, учитывающего, что поток теплоты не мгновенно реагирует на изменение градиента температуры. В таких случаях необходимо вместо соотношения (5) для вывода уравнения теплопроводности воспользоваться теорией Максвелла — Каттанео — Лыкова, учитывающей инерцию теплового потока [6]:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T - \tau_p \frac{\partial \vec{q}}{\partial T}, \quad (6)$$

где $\tau_p = a / w^2$ — время релаксации теплового потока; a — коэффициент температуропроводности материала; w — скорость распространения теплоты.

При использовании закона (6) уравнение, описывающее изменение температурного поля в среде, принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 T - \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad r > R, \quad t > 0. \quad (7)$$

2. Определяющие соотношения и граничные условия

Для решения задачи о распространении волн в изотропном упругом цилиндре бесконечной длины запишем уравнения движения и теплопроводности в цилиндрической системе координат, считая, что все функции зависят только от радиальной координаты:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad r > R, \quad t > 0, \quad (9)$$

где u — радиальная компонента вектора перемещения, α_T — коэффициент линейного теплового расширения, μ — коэффициент Пуассона, c — скорость распространения волны в упругой среде.

Запишем начальные и граничные условия для уравнений движения и теплопроводности:

$$\sigma_{ij}(r, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad r \geq R; \quad (10)$$

$$T(r, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad r \geq R; \quad (11)$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_1} = -p_1,$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_2} = -p_2; \quad (12)$$

$$T_1(r, t) \Big|_{r=R} = T_c, \quad r \geq R,$$

$$\left. \frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial T_3(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = h \left[T_3(r,t) \Big|_{r=R} - T_c \right], \quad t > 0,$$

$$T_i(r,t) \langle \infty, r \geq R, t \rangle 0.$$

Заключение

Приведенная система уравнений (8)–(9) с начальными (10), (11) и граничными (12), (13) условиями является основой для численного моделирования распространения механических и тепловых волн в цилиндрической конструкции. Разработка и анализ такой модели является актуальным и перспективным, поскольку полученные решения могут быть применены к задачам, в которых тело подвержено внешним механическим воздействиям и резкому (ударному) изменению внешнего температурного поля.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагревания границы // ПММ. – 1950. – 14, № 3.
2. Карышев А. К., Супельняк М. И. Температурное поле цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – № 4. – С. 54–70.
3. Карышев А. К., Супельняк М. И. Температурное Термоциклические напряжения в цилиндре, вызванные нестационарным периодическими условиями теплообмена с внешней средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – № 4. – С. 54–70.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М. : Наука, 1970. – 492 с.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев : Наукова думка, 1970. – 370 с.
6. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М. : Высш. шк., 2001. – 550 с.

СИЗИГИИ В СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛУИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. В работе рассматриваются примеры сизигий для индивидуальных полуинвариантов асимметричных тензоров второго ранга в трехмерном пространстве. Рассматриваются две эквивалентные системы псевдоинвариантов: (S)-система и (I)-система. Приводится полный набор из 86 неприводимых полуинвариантов для системы, состоящей из двух симметричных и двух антисимметричных аффиноров. Для индивидуальных инвариантов рассматриваются примеры целых рациональных сизигий. Примеры сизигий подобраны так, чтобы продемонстрировать отличие регулярных и нерегулярных, правильных и неправильных сизигий.

Ключевые слова: целый рациональный инвариант, сизигии, гемитропный инвариант, асимметричный тензор, аффинор.

Введение

При построении математических моделей микрополярных упругих тел важнейшей задачей является формулировка потенциала силовых и моментных напряжений [1–6]. Для гемитропных микрополярных тел такой потенциал необходимо формулировать в терминах полуинвариантов для системы, состоящей из одного абсолютного асимметричного тензора и одного асимметричного псевдотензора (псевдоаффинора) второго ранга. В этом случае энергетическая форма потенциала является линейной оболочкой индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля спинорных перемещений относительно гемитропной (полуизотропной) группы преобразований трехмерного пространства.

Вместе с тем, построение полной неприводимой системы индивидуальных и совместных полуинвариантов двух асимметричных псевдотензоров является нетривиальной задачей современной алгебры псевдотензоров и теории рациональных инвариантов [7–9]. Устранить «лишние» полуинварианты и получить их неприводимый набор позволяют рациональные сизигии [7–9]. Целой однородной степени m рациональной сизигией (syzygy) для набора полуинвариантов I_1, I_2, \dots, I_n назовем полиномиальное соотношение вида:

$$\sum_{p_1 + p_2 + \dots + p_n = m} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} I_1^{p_1} \cdot I_2^{p_2} \cdot \dots \cdot I_n^{p_n} = 0,$$

где p_1, p_2, \dots, p_n суть целые числа ($\text{Ent}(p_i) = p_i$), а суммирование производится по допустимым суммам $p_1 + p_2 + \dots + p_n = m$, ($m = 1, 2, 3, \dots$). Допустимы сизигии разной степени однородности.

В настоящей работе предлагается среди сизигии выделить два главных класса (регулярные и нерегулярные) и два подкласса (правильные и неправильные). К регулярным сизигиям отнесем такие рациональные сизигии, с помощью которых можно получить целое рациональное выражение, позволяющие в конце концов устранить из рассмотрения полуинвариантные следы, составляющие сизигию. Кроме того, регулярную сизигию назовем правильной относительно ряда полуинвариантных следов, для которых с ее помощью удастся получить целые рациональные выражения. Если для какого-либо полуинвариантного следа такое выражение получить не удастся, то сизигия в отношении этого следа будет считаться неправильной. Если

не удается получить никакого целого рационального выражения ни для какого псевдоинвариантного следа, то такую сизигию назовем нерегулярной (ясно, что нерегулярная сизигия является неправильной для любого, входящего в нее псевдоинвариантного следа).

1. Следы, образующие целый рациональный базис полуинвариантов относительно гемитропной группы преобразований в трехмерном пространстве

Простейшую систему полуинвариантов псевдоаффинора $T_{\cdot k}^j$ можно задать с помощью следов его степеней:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{tr} [\mathbf{T}] = T_{\cdot s}^s, \\ S_2 &= \text{tr} [\mathbf{T}^2] = T_{\cdot k}^s T_{\cdot s}^k, \\ &\vdots \\ S_k &= \text{tr} [\mathbf{T}^k] = T_{\cdot s_2}^{s_1} T_{\cdot s_3}^{s_2} \dots T_{\cdot s_k}^{s_{k-1}} T_{\cdot s_1}^{s_k}, \end{aligned}$$

где номера $1, 2, \dots, k, \dots$, помещенные снизу символа полуинварианта, являются метаномерами, нумерующими инварианты (S)-системы индивидуальных полуинвариантов.

Альтернативную (I)-систему индивидуальных полуинвариантов, чаще всего используемую в механике сплошных сред, можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{\cdot i}^i, \\ I_2 &= T_{\cdot [i_2}^{i_1} T_{\cdot i_1]}^{i_2}, \\ &\vdots \\ I_k &= (-1)^{k-1} T_{\cdot [i_2}^{i_1} T_{\cdot i_3}^{i_2} \dots T_{\cdot i_k}^{i_{k-1}} T_{\cdot i_1]}^{i_k}, \end{aligned}$$

где по индексам, заключенным в квадратные скобки, выполняется операция альтернирования:

$$A_{\cdot [i_1 i_2 \dots i_s]} = \frac{1}{s!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_s}^{k_1 k_2 \dots k_s} A_{\cdot k_1 k_2 \dots k_s},$$

где $\delta_{i_1 i_2 \dots i_s}^{k_1 k_2 \dots k_s}$ — обобщенная дельта Кронекера [7].

Дальнейшие рассуждения проведем в трехмерном Евклидовом пространстве. Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров можно представить в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметричной частей, т. е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{V}, \quad \mathbf{B} + \mathbf{W}.$$

При этом, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^T, & \mathbf{V} &= -\mathbf{V}^T, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^T, & \mathbf{W} &= -\mathbf{W}^T. \end{aligned}$$

Используя результаты полученные ранее в работах [8, 9], для системы, состоящей из двух симметричных \mathbf{A} , \mathbf{B} и двух антисимметричных \mathbf{V} , \mathbf{W} тензоров второго ранга, можно построить систему инвариантов. Полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [8, 9], упорядоченных согласно [8, С. 65, Табл. 2]:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1.) $\text{tr} [\mathbf{A}]$; | 2.) $\text{tr} [\mathbf{A}^2]$; | 3.) $\text{tr} [\mathbf{A}^3]$; | 4.) $\text{tr} [\mathbf{B}]$; |
| 5.) $\text{tr} [\mathbf{B}^2]$; | 6.) $\text{tr} [\mathbf{B}^3]$; | 7.) $\text{tr} [\mathbf{V}^2]$; | 8.) $\text{tr} [\mathbf{W}^2]$; |
| 9.) $\text{tr} [\mathbf{AB}]$; | 10.) $\text{tr} [\mathbf{A}^2 \mathbf{B}]$; | 11.) $\text{tr} [\mathbf{B}^2 \mathbf{A}]$; | 12.) $\text{tr} [\mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2]$; |
| 13.) $\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{A}]$; | 14.) $\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{A}^2]$; | 15.) $\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{A}^2]$; | 16.) $\text{tr} [\mathbf{V}^2 \mathbf{B}]$; |

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 17.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]$; | 18.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2]$; | 19.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]$; | 20.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]$; |
| 21.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2]$; | 22.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]$; | 23.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]$; | 24.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2]$; |
| 25.) $\text{tr}[\mathbf{VW}]$; | 26.) $\text{tr}[\mathbf{VAB}]$; | 27.) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]$; | 28.) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]$; |
| 29.) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2]$; | 30.) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}]$; | 31.) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}]$; | 32.) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; |
| 33.) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 34.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]$; | 35.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 36.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; |
| 37.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}]$; | 38.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2]$; | 39.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2]$; | 40.) $\text{tr}[\mathbf{WAB}]$; |
| 41.) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]$; | 42.) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]$; | 43.) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2]$; | 44.) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}]$; |
| 45.) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}]$; | 46.) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; | 47.) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 48.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]$; |
| 49.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 50.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; | 51.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}]$; | 52.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2]$; |
| 53.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2]$; | 54.) $\text{tr}[\mathbf{VWA}]$; | 55.) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2]$; | 56.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]$; |
| 57.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]$; | 58.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2]$; | 59.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2]$; | 60.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2]$; |
| 61.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2]$; | 62.) $\text{tr}[\mathbf{VWB}]$; | 63.) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2]$; | 64.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]$; |
| 65.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]$; | 66.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2]$; | 67.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2]$; | 68.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2]$; |
| 69.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2]$; | 70.) $\text{tr}[\mathbf{VWAB}]$; | 71.) $\text{tr}[\mathbf{VWBA}]$; | 72.) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}]$; |
| 73.) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}]$; | 74.) $\text{tr}[\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}]$; | 75.) $\text{tr}[\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}]$; | 76.) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2]$; |
| 77.) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}]$; | 78.) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}]$; | 79.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}]$; | 80.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}]$; |
| 81.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}]$; | 82.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}]$; | 83.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2]$; | 84.) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2]$; |
| 85.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2]$; | 86.) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2]$. | | |

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров, т. е. вместо $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ запишем \mathbf{AB} .

Система индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов и полуинвариантов может быть использована при построении моделей микрополярных гемитропных линейных и нелинейных тел. Если в качестве тензоров деформаций используются асимметричные тензор деформаций ϵ , а в качестве тензора изгиба–кручения — псевдотензор нечетного алгебраического веса κ , то для этого следует выполнить следующую замену:

$$\mathbf{A} = \text{sym } \epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^T), \quad \mathbf{B} = \text{sym } \kappa = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^T),$$

$$\mathbf{V} = \text{asym } \epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon^T), \quad \mathbf{W} = \text{asym } \kappa = \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^T).$$

2. Примеры целых рациональных сизигий в системе гемитропных псевдоинвариантов двух асимметричных тензоров второго ранга

Рассмотрим первый пример. Вычислим сизигию, устраняющую из рассмотрения инвариант $\text{tr}[\mathbf{A}^4]$. Представим матрицу симметричного тензора второго ранга $\text{Mat}[\mathbf{A}]$, заданного в трехмерном пространстве в диагональном виде:

$$\text{Mat}[\mathbf{A}] = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad (1)$$

где a_1, a_2, a_3 суть вещественные собственные числа тензора \mathbf{A} . Указанное представление справедливо для симметричного тензора в координатной системе, базис которой составлен из взаимно-ортогональных собственных векторов тензора \mathbf{A} . Из (1) следует, что

$$\text{Mat}[\mathbf{A}] = \text{diag}(a_1, a_2, a_3),$$

$$\text{Mat}[\mathbf{A}^2] = \text{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2),$$

$$\begin{aligned}\text{Mat}[\mathbf{A}^3] &= \text{diag}(a_1^3, a_2^3, a_3^3), \\ \text{Mat}[\mathbf{A}^4] &= \text{diag}(a_1^4, a_2^4, a_3^4),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\text{tr}[\mathbf{A}] &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \text{tr}[\mathbf{A}^2] &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \\ \text{tr}[\mathbf{A}^3] &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3, \\ \text{tr}[\mathbf{A}^4] &= a_1^4 + a_2^4 + a_3^4,\end{aligned}$$

Выпишем формулы Ньютона [7] для значений $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} - \mathbf{I} &= 0, \\ \mathbf{S} - \mathbf{I}\mathbf{S} + 2\mathbf{I} &= 0, \\ \mathbf{S} - \mathbf{I}\mathbf{S} + \mathbf{I}\mathbf{S} - 3\mathbf{I} &= 0.\end{aligned}$$

Откуда, после несложных преобразований получим:

$$6\mathbf{I} = 2\mathbf{S} - 3\mathbf{S}\mathbf{S} + \mathbf{S}^3$$

или в терминах инвариантных следов

$$6\mathbf{I} = 2\text{tr}[\mathbf{A}^3] - 3\text{tr}[\mathbf{A}^2]\text{tr}[\mathbf{A}] + (\text{tr}[\mathbf{A}])^3. \quad (2)$$

Далее воспользуемся вспомогательными формулами

$$(\text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 = \text{tr}[\mathbf{A}^4] + 2(a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2) \quad (3)$$

и, кроме того,

$$\frac{1}{2}((\text{tr}[\mathbf{A}])^2 - \text{tr}[\mathbf{A}^2]) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3. \quad (4)$$

Возведем в квадрат правую часть равенства (4):

$$\begin{aligned}(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)^2 &= (a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2) + 2(a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1a_2a_3^2) = \\ &= (a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2) + 2\mathbf{I}\text{tr}[\mathbf{A}],\end{aligned}$$

откуда находим

$$(a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_3^2) = \frac{1}{4}((\text{tr}[\mathbf{A}])^2 - \text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 - 2\mathbf{I}\text{tr}[\mathbf{A}]. \quad (5)$$

Анализируя равенства (3) и (5), в итоге получим:

$$2\text{tr}[\mathbf{A}^4] = 8\mathbf{I}\text{tr}[\mathbf{A}] + 2(\text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 - ((\text{tr}[\mathbf{A}])^2 - \text{tr}[\mathbf{A}^2])^2$$

или с учетом (2) приходим к искомой рациональной сизигии:

$$\text{tr}[\mathbf{A}^4] = \frac{4}{3}(\text{tr}[\mathbf{A}^3] - \frac{3}{2}\text{tr}[\mathbf{A}^2]\text{tr}[\mathbf{A}] + \frac{1}{2}(\text{tr}[\mathbf{A}])^3)\text{tr}[\mathbf{A}] + (\text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 - \frac{1}{2}((\text{tr}[\mathbf{A}])^2 - \text{tr}[\mathbf{A}^2])^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых окончательно получим:

$$6\text{tr}[\mathbf{A}^4] - 8\text{tr}[\mathbf{A}^3]\text{tr}[\mathbf{A}] - (\text{tr}[\mathbf{A}])^4 - 3(\text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 + 6\text{tr}[\mathbf{A}^2](\text{tr}[\mathbf{A}])^2 = 0. \quad (6)$$

Сизигия (6) является регулярной и правильной в отношении $\text{tr}[\mathbf{A}^4]$, поскольку позволяет устранить указанный след с помощью рациональной зависимости:

$$\text{tr}[\mathbf{A}^4] = \frac{1}{6}(\text{tr}[\mathbf{A}])^4 + \frac{4}{3}\text{tr}[\mathbf{A}^3]\text{tr}[\mathbf{A}] + \frac{1}{2}(\text{tr}[\mathbf{A}^2])^2 - \text{tr}[\mathbf{A}^2](\text{tr}[\mathbf{A}])^2.$$

Тем не менее, в отношении следов $\text{tr}[\mathbf{A}^3]$, $\text{tr}[\mathbf{A}^2]$ и $\text{tr}[\mathbf{A}]$ данная выше сизигия является не правильной, в силу того, что не представляется возможным получить рациональные соотношения связывающие по отдельности указанные следы с оставшимися. Если вести речь о дроб-

но-рациональном представлении, то рассматриваемая сизигия будет правильной в отношении, например, инвариантного следа $\text{tr}[\mathbf{A}^3]$.

Отметим, что доказательство первого примера было проведено для симметричных тензоров второго ранга, используя диагональное представление и формулы Ньютона и Варинга, без привлечения теоремы Гамильтона — Кели [10]. Альтернативное доказательство можно провести с использованием теоремы Гамильтона — Кели справедливой для произвольного псевдотензора второго ранга, вычислив след левой части равенства после предварительного умножения на \mathbf{A} .

Следующий пример касается инвариантных следов целых степеней асимметричного тензора второго ранга для любого натурального n справедливо следующее утверждение

$$\text{tr}[\mathbf{W}^{2n-1}] = 0,$$

т. е. след нечетной степени асимметричного тензора второго ранга равен нулю. В этом случае, очевидно, имеем регулярную правильную сизигию, устраняющую нулевые инвариантные следы.

Приведем заключительный пример. Рассмотрим векторы, ассоциированные с асимметричными тензорами второго ранга, в виде

$$w_i = \frac{1}{2} e_{ijs} W^{js} = \frac{1}{2} e_{ijs} W^{[js]}, \quad w^i = \frac{1}{2} e^{ijs} W_{js} = \frac{1}{2} e^{ijs} W_{[js]},$$

где e_{ijs} и e^{ijs} — альтернирующие тензоры (абсолютные тензоры третьего ранга).

Отметим важные для дальнейшего рассмотрения свойства альтернирующего тензора:

$$e_{ijs} e^{ljs} = \epsilon_{ijs} \epsilon^{ljs} = 2\delta_i^l, \quad e_{ijs} e^{lms} = \epsilon_{ijs} \epsilon^{lms} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l,$$

где ϵ_{ijs} и ϵ^{ljs} — символы перестановок (псевдотензоры с постоянными компонентами третьего ранга).

Вычислим след квадрата асимметричного тензора второго ранга. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{W}^2] &= W^{sk} W_{ks} = -W^{sk} W_{sk} = -e^{skl} w_l e_{skm} w^m = \\ &= -2\delta_m^l w_l w^m = -2|\mathbf{w}|^2. \end{aligned}$$

След четвертой степени асимметричного тензора второго ранга вычисляется аналогично:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{W}^4] &= W^{sk} W_{kl} W^{lm} W_{ms} = e^{skp} w_p e_{klh} w^h e^{lmq} w_q e_{msr} w^r = \\ &= (e^{skp} e_{klh} e^{lmq} e_{msr}) w_p w^h w_q w^r = (e^{spk} e_{lkh} e^{lqm} e_{srm}) w_p w^h w_q w^r = \\ &= (\delta_l^s \delta_h^p - \delta_l^p \delta_h^s)(\delta_s^l \delta_r^q - \delta_s^q \delta_r^l) w_p w^h w_q w^r = \\ &= (\delta_l^s \delta_h^p \delta_s^l \delta_r^q - \delta_l^s \delta_h^p \delta_s^q \delta_r^l - \delta_l^p \delta_h^s \delta_s^l \delta_r^q + \delta_l^p \delta_h^s \delta_s^q \delta_r^l) w_p w^h w_q w^r = \\ &= (3\delta_h^p \delta_r^q - \delta_r^q \delta_h^p - \delta_h^p \delta_r^q + \delta_r^p \delta_h^q) w_p w^h w_q w^r = \\ &= (\delta_h^p \delta_r^q + \delta_r^p \delta_h^q) w_p w^h w_q w^r = 2(w_p w^p)(w_q w^q) = 2|\mathbf{w}|^4. \end{aligned}$$

Откуда следует очевидная рациональная сизигия:

$$2\text{tr}[\mathbf{W}^4] - (\text{tr}[\mathbf{W}^2])^2 = 0. \quad (7)$$

Сизигия (7) регулярна и правильна в отношении $\text{tr}[\mathbf{W}^4]$, поскольку позволяет устранить этот след с помощью целой рациональной зависимости:

$$\text{tr}[\mathbf{W}^4] = \frac{1}{2} (\text{tr}[\mathbf{W}^2])^2.$$

Однако в отношении следа $\text{tr}[\mathbf{W}^2]$ сизигия (7) является неправильной, т. к. невозможно выразить указанный след через след $\text{tr}[\mathbf{W}^4]$ никаким целым рациональным соотношением.

Заключение и выводы

В работе рассмотрены примеры рациональных сизигий для целых рациональных гемитропных инвариантов системы двух асимметричных тензоров второго ранга. Приведен пол-

ный набор из 86 инвариантов для системы, состоящей из двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга. Изучены примеры рациональных сизигий между целыми рациональными гемитропными полуинвариантами системы двух асимметричных псевдоаффиноров в трехмерном пространстве. Проведена классификация рассмотренных сизигий на два главных класса (регулярные и нерегулярные) и два подкласса (правильные и не правильные). Полученные результаты могут быть использованы при построении нелинейных гемитропных микрополярных моделей [11–13].

Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124013000674-0).

Литература

1. *Cosserat E. Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.*
2. *Gunther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums / W. Gunther // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. – 1958. – Bd. 10. – S. 195–213.*
3. *Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums / S. Kessel // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. – 1964. – Bd. 16. – S. 1–22.*
4. *Neuber H. On the General Solution of Linear-Elastic Problems in Isotropic and Anisotropic Cosserat Continua / H. Neuber // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 1966. – P. 153–158.*
5. *Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity / W. Nowacki. – Berlin : Springer, 1972. – 483 p.*
6. *Радаев Ю. Н. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред / Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412.*
7. *Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов / Г. Б. Гуревич. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. – 431 с.*
8. *Спенсер Э. Теория инвариантов / Э. Спенсер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1974. – 223 с.*
9. *Spencer A. J. M. Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second-Order Tensors: Part II / A. J. M. Spencer // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – Vol. 18, No 1. – P. 51–82.*
10. *Murashkin E. V. Generalization of the Algebraic Hamilton–Cayley Theory / E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev // Mechanics of Solids. – 2021. – Vol. 56, No 6. – P. 996–1003.*
11. *Мурашкин Е. В. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 3 (53). – С. 86–100.*
12. *Murashkin E. V. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела / E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 29, No 2. – P. 207–219.*
13. *Murashkin E. V. Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid / E. V. Murashkin, Y. N. Radayev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. – Vol. 46, No 5. – P. 2391–2400.*

ПЛОСКИЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ В ГИПОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

М. Ю. Соколова

Тульский государственный университет

Аннотация. Решена задача об отражении плоских акустических волн от жесткой стенки, ограничивающей полупространство, занимаемое анизотропной средой. Рассмотрена анизотропная гипопругая среда, по свойствам симметрии относящаяся к кубической кристаллографической системе. В среде действуют однородные начальные напряжения одноосного сжатия. На основании определения вектора Умова — Пойнтинга найдены зависимости энергетических коэффициентов отражения для падающих квазипродольной и квазипоперечной волн от угла падения. Для рассмотренного материала определены три критических угла падения квазипоперечных волн. Выявлено влияние начальных напряжений на коэффициенты отражения и значения критических углов.

Ключевые слова: гипопругость, анизотропия, кубический кристалл, начальные напряжения, акустическая волна, вектор Умова — Пойнтинга, энергетические коэффициенты отражения, квазипродольная волна, квазипоперечная волна, критические углы падения.

Введение

Распространение упругих волн в средах с начальными напряжениями широко используется при решении технических задач в различных областях: геофизики и сейсмологии, материаловедения и инженерии, биомеханики и медицины. В работах [1–5] среда рассматривается как линейно упругая, а полученные в них уравнения и соотношения составляют основу линейной теории распространения упругих волн. Особенности распространения волн в анизотропных средах посвящены работы [2–5].

В работах [6–11] предложена приближенная теория распространения акустических волн в анизотропных гипопругих средах с начальными напряжениями. В работах [6, 7] получены линеаризованные в окрестности начального состояния динамические уравнения распространения акустических волн, а в статьях [8, 9] получены динамические уравнения, записанные относительно поля скоростей, и представление для акустического тензора среды с начальными напряжениями. На основе этих уравнений на примере анизотропного материала с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической кристаллографической системы, в работах [8, 9] проанализировано влияние начальных напряжений на фазовые скорости распространения волн, а также на ориентацию векторов поляризации, векторов лучевых скоростей и векторов рефракции (при отражении от жесткой стенки) относительно вектора волновой нормали. В работе [10] дано определение акустического вектора Умова — Пойнтинга для гипопругой среды с начальными напряжениями.

Целью настоящей работы является решение задачи отражения плоских волн от жесткой стенки в случае, когда рассматриваемая среда является начально анизотропной с действующими начальными напряжениями. Такая среда будет рассмотрена в рамках обобщенной модели гипопругости. Будут рассчитаны коэффициенты отражения для квазипродольных (QL) и квазипоперечных (QS) волн. По результатам численного решения примера для предварительно сжатой анизотропной среды с кубической симметрией свойств будет проанализировано влияние начальных напряжений на перераспределение потоков энергии между отраженными волнами.

1. Постановка задачи об отражении плоских волн от жесткой стенки

Рассмотрим плоские волны, распространяющиеся в полупространстве, ограниченном жесткой стенкой. Пусть стенка совпадает с одной из плоскостей симметрии анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе. Для определенности считаем, что жесткая стенка совпадает с плоскостью векторов \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , а нормаль к стенке направлена вдоль вектора \mathbf{e}_1 (см. рис. 1). В полупространстве действуют начальные одноосные напряжения $\Sigma_1 = \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$. Рассматриваем волны, распространяющиеся в плоскости векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , и имеющие вектор волновой нормали $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$. В этом случае плоскость векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 является плоскостью падения. В силу симметрии свойств среды отраженные волны также распространяются в этой плоскости. Если для падающей волны $\mathbf{n}_0 = \cos \alpha_0 \mathbf{e}_1 + \sin \alpha_0 \mathbf{e}_2$, то угол α_0 называют углом падения волны.

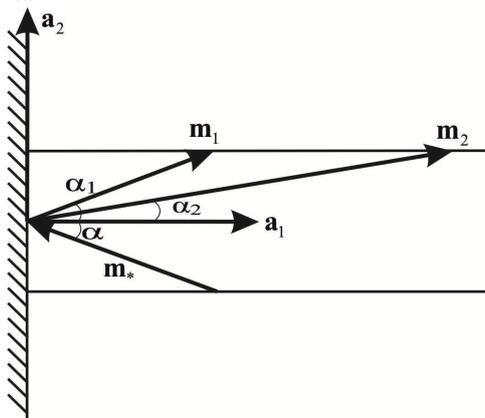


Рис. 1. Отражение упругой волны от жесткой преграды

При падении на жесткую стенку только квазипродольной или только квазипоперечной волны от стенки в общем случае отражаются две волны: квазипродольная (QL) и квазипоперечная (QS). На рис. 1 введены обозначения для векторов рефракции $\mathbf{m} = \mathbf{n}/c$, где c — фазовая скорость распространения волны. Для падающей и отраженных волн на поверхности жесткой стенки выполняются граничные условия:

$$\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — перемещения, связанные с прохождением падающей и двух отраженных волн.

Для решения задачи об отражении (преломлении) упругих волн обычно полагают, что для падающей волны вектор рефракции $\mathbf{m}_0 = \mathbf{n}_0/c_0$ известен, а для отраженных волн векторы \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 требуется найти. Для этого используют общий закон отражения (преломления) волн, в соответствии с которым проекции векторов рефракции падающей и отраженных (преломленных) волн на поверхность раздела равны между собой [2, 5], а также уравнение поверхности рефракции. Уравнение поверхности рефракции для плоских волн, распространяющихся в гипотупругой среде с начальными напряжениями, имеет вид [9]:

$$\det(\mathbf{A}_m - \mathbf{E}) = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) тензор рефракции \mathbf{A}_m определяется выражением

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{m}, \Sigma_1) = \frac{1}{\rho_0} \left[\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{m} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{m} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{m} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \Sigma_1 \right) - \frac{1}{2} (\Sigma_1 \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \Sigma_1) \right], \quad (3)$$

где ρ_0 — плотность среды, \mathbf{N} — тензор упругих свойств среды, Σ_1 — тензор начальных напряжений, \mathbf{E} — единичный тензор.

Отраженные от жесткой преграды поляризованные в плоскости падения волны имеют векторы рефракции $\mathbf{m}_1 = \mathbf{n}_1/c_1$ и $\mathbf{m}_2 = \mathbf{n}_2/c_2$. В соответствии с общим законом отражения

$$\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha_0}{c_0} = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}.$$

Для отраженных волн представим векторы рефракции в виде

$$\mathbf{m}_1 = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\sin \alpha_0}{c_0} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{m}_2 = \xi_2 \mathbf{e}_1 + \frac{\sin \alpha_0}{c_0} \mathbf{e}_2.$$

Коэффициенты ξ_1, ξ_2 являются корнями уравнения (2) и для отраженных волн принимают положительные значения. Поскольку тензор рефракции (3) зависит от начальных напряжений Σ_1 , корни уравнения (2) также зависят от Σ_1 . Углы отражения α_1 и α_2 определяются через коэффициенты ξ_1, ξ_2 в соответствии с выражениями

$$\cos \alpha_1 = \xi_1 c_1, \quad \cos \alpha_2 = \xi_2 c_2.$$

Для волн, поляризованных в плоскости падения, коэффициенты ξ_1, ξ_2 определяются из биквадратного уравнения, коэффициенты которого выражаются через упругие константы материала C_{11}, C_{12}, C_{44} , начальные напряжения σ , плотность ρ_0 и характеристику падающей волны $\frac{\sin \alpha_0}{c_0}$. Решение такого уравнения может быть получено аналитически, но из-за его громоздкости здесь не приводится.

2. Энергетические коэффициенты отражения

Определим энергетические коэффициенты отражения, позволяющие судить о перераспределении энергии, переносимой падающей волной, между отраженными волнами. Для этого используем методику, предложенную в работах [4, 11]. Для падающей и отраженных от жесткой стенки волн на поверхности раздела сумма проекций векторов Умова — Пойнтинга на нормаль к этой поверхности равна нулю [4]. В рассматриваемом случае это условие приводит к равенству:

$$\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{q} + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{q} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1$ — единичная нормаль к поверхности раздела, $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ — векторы Умова — Пойнтинга для падающей и двух отраженных волн.

Проекция вектора Умова — Пойнтинга для каждой из рассматриваемых волн с вектором рефракции $\mathbf{m}_i = m_{i1} \mathbf{e}_1 + m_{i2} \mathbf{e}_2$ и вектором поляризации $\mathbf{p}_i = p_{i1} \mathbf{e}_1 + p_{i2} \mathbf{e}_2$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{q} &= J_1^{-1} A_i^2 \omega_i^2 F_p \\ F_i &= p_{i1} (C_{11} p_{i1} m_{i1} + C_{12} p_{i2} m_{i2}) + p_{i2} C_{44} (p_{i1} m_{i2} + p_{i2} m_{i1}) + \\ &+ 0,5 p_{i2} (p_{i2} m_{i1} - p_{i1} m_{i2}) \sigma - p_{i1} (p_{i1} m_{i1} + p_{i2} m_{i2}) \sigma, \end{aligned}$$

где A_i — амплитуда, ω_i — частота волны, индекс $i = 0$ для падающей волны, $i = 1$ и $i = 2$ для отраженных волн.

Определим энергетические коэффициенты отражения отношениями

$$R_1 = -\frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{q}} = -\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 \frac{F_1}{F_0}, \quad R_2 = -\frac{\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{q}} = -\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \frac{F_2}{F_0}. \quad (5)$$

Амплитудные коэффициенты отражения определяются из условий на границе (1) и равны

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{p_{02} p_{21} - p_{01} p_{22}}{p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{p_{01} p_{12} - p_{02} p_{11}}{p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}}. \quad (6)$$

В соответствии с (4) $R_1 + R_2 = 1$. В линейной теории распространения упругих волн коэффициенты отражения R_1 и R_2 представляют собой отношения потоков энергии, переносимых отраженными волнами, к потоку энергии, переносимой падающей волной. В гипотетической сре-

де с начальными напряжениями энергетические коэффициенты отражения зависят от величины действующих напряжений.

Далее приведены результаты расчетов энергетических коэффициентов отражения для кубического материала, степень анизотропии которого $\frac{2C_{44}}{C_{11}-C_{12}} = 1,73$. В расчетах принимались следующие значения напряжений, отнесенные к величине $0,5(C_{11}-C_{12})$: $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = -0,15$, $\sigma_2 = -0,29$, $\sigma_3 = -0,44$. На рис. 2 и 3 приведены зависимости энергетических коэффициентов отражения R_1 и R_2 от угла падения α_0 , полученные по формулам (5), (6) для значений сжимающих напряжений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3$. На рис. 2 падающая волна является квазипродольной, на рис. 3 падающая волна — квазипоперечная.

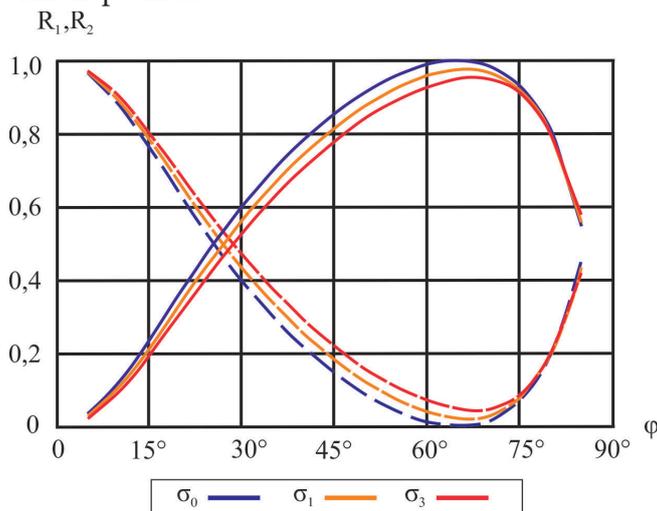


Рис. 2. Энергетические коэффициенты отражения QL (пунктирная линия) и QS (сплошная линия) волн при падении QL волны

3. Обсуждение результатов расчетов

Анализ результатов показывает, что действие в среде начальных напряжений приводит к перераспределению потоков энергии между отраженными волнами. Особенно ярко этот эффект проявляется, если падающая волна является квазипродольной. В рассматриваемом примере действие сжимающих напряжений приводит к увеличению энергии, переносимой отраженной QL волной в направлении нормали к поверхности раздела. При этом уменьшается энергия, переносимая отраженной QS волной в этом направлении. Если падающая волна является квазипоперечной, то действие сжимающих напряжений приводит к обратному эффекту. Энергия, переносимая отраженной QS волной, увеличивается, а переносимая отраженной QL волной — уменьшается. Однако, при падении квазипоперечной волны одна из отраженных волн является квазипродольной для всех углов падения, меньших первого критического значения $\alpha_0^1 \approx 28^\circ$.

Дальнейший рост угла падения квазипоперечной волны приводит к тому, что в рассматриваемом полупространстве распространяется только отраженная QS волна. Энергетический коэффициент отражения R_1 при этом становится равным 0, а $R_2 = 1$. Эти значения сохраняются до тех пор, пока угол падения квазипоперечной волны не достигнет второго критического значения $\alpha_0^2 \approx 46^\circ$. При углах падения квазипоперечной волны больших α_0^2 обе отраженные волны являются квазипоперечными. Перераспределение энергий между первой и второй отраженными QS волнами значительно зависит от действующих напряжений. С ростом величины сжимающих напряжений энергия, переносимая QS1 волной, уменьшается, а переносимая QS2 волной — увеличивается.

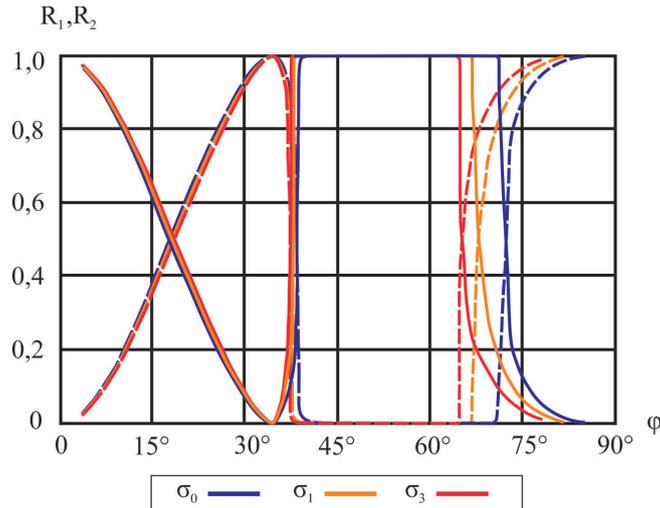


Рис. 3. Энергетические коэффициенты отражения QL (пунктир длинный), QS1 (сплошная линия) и QS2 (пунктир короткий) волн при падении QS волны

Когда угол падения квазипоперечной волны превышает третье критическое значение $\alpha_0^3 \approx 62^\circ$, потоки энергии перестают отражаться от жесткой стенки. Это объясняется «сносом» энергии падающей волны. При $\alpha_0 > \alpha_0^3$ для падающей квазипоперечной волны проекция вектора Умова — Пойнтинга на направление нормали к поверхности раздела оказывается положительной, и энергия не отражается от жесткой стенки.

Понятие о критических углах падения квазипоперечных волн введено в работе [4]. Отметим, что приведенные на рис. 3 результаты расчетов показывают зависимость критических значений угла падения от величины действующих сжимающих напряжений. В рассмотренном примере величины критических углов уменьшаются с ростом величины сжимающего напряжения. В наибольшей степени это сказывается на величине второго критического угла α_0^2 .

Заключение

В данной работе решена задача об отражении плоских волн, распространяющихся в анизотропной среде с начальными напряжениями, от жесткой стенки, и определены энергетические коэффициенты отражения QL и QS волн, поляризованных в плоскости падения.

Показано, что коэффициенты отражения зависят от действующих в среде предварительных сжимающих напряжений. Эта зависимость усиливается с ростом величины напряжений. Указанный эффект может быть использован для управления интенсивностями отраженных волн, например, в медицинских технологиях HIFU-терапии (High-Intensity Focused Ultrasound). В акустооптических приборах, где требуется высокая точность работы, начальные напряжения могут быть нежелательными. Полученные в статье результаты позволяют учесть влияние на работу этих приборов начальных напряжений, например, тепловых.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Литература

1. Biot M. A. The influence of initial stress on elastic waves / M. A. Biot // J. Appl. Phys. – 1940. – V. 11. – P. 522–530. doi:10.1063/1.1712807

2. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 383 с.
3. Сиротин Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 640 с.
4. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. Volume 1 and 2 / B. A. Auld. – John Wiley & Sons, Inc., 1973. – 430 p.
5. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 424 с.
6. Соколова М. Ю. Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы / М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, В. 2. – С. 334–349. doi: 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349
7. Маркин А. А. Динамические уравнения распространения акустических волн в предварительно деформированных материалах / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова // Известия РАН. Механика твердого тела. – № 2. – 2024. – С.166–182. doi: 10.31857/S1026351924020066
8. Соколова М. Ю. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах / М. Ю. Соколова, А. А. Маркин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 91. – С. 113–124. – doi: 10.17223/19988621/91/10
9. Соколова М. Ю. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах / М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич, Д. В. Праведников // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, В. 5. – С. 292–306. doi: 10.22405/2226-8383-2024-25-5-292–306.
10. Соколова М. Ю. Об определении вектора Умова-Пойнтинга при распространении акустических волн в гипопругой среде / М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич, Д. В. Праведников // Чебышевский сборник. – 2025. – Т. 26, В. 1. – С. 181–189. doi:10.22405/2226-8383-2025-26-1-181-189
11. Voloshinov V. B. Reflection of plane elastic waves in tetragonal crystals with strong anisotropy / V. B. Voloshinov, N. V. Polikarpova, N. F. Declercq // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – Т. 125(2). – P. 772–779. doi: 10.1121/1.3050307

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ СПЛАВА P110 ДЛЯ ОЦЕНКИ ГЕРМЕТИЧНОСТИ ПРЕМИАЛЬНЫХ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

К. С. Стрелков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннотация. В работе приведены результаты испытаний на ползучесть образцов сплава P110, используемого при производстве труб нефтегазового сортамента с резьбовыми соединениями класса «Премиум». Для моделирования процесса ползучести при эксплуатации резьбового соединения в рамках исследования было проведено подбор параметров модели деформационного упрочнения путем решения нелинейного дифференциального уравнения методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Также для оценки релаксации контактных давлений в радиальном уплотнении «металл-металл» вследствие ползучести, приведено сравнение модели деформационного упрочнения с моделью Максвелла — Вихерта для вязкоупругого тела при нагружении резьбового соединения внутренним давлением и растяжением.

Ключевые слова: ползучесть, закон деформационного упрочнения, премиальные резьбовые соединения, модель Максвелла — Вихерта, релаксация контактных давлений, релаксация контактных давлений.

Введение

Современные премиальные соединения, широко применяемые в конструкциях нефтегазовых скважин, включая месторождения с экстремальными условиями, характеризуются наличием оптимизированного резьбового профиля и специального уплотнительного элемента, создающего радиальный натяг. Именно этот натяг формирует зону контактного давления, отвечающую за герметичность. Однако в условиях длительного воздействия высоких температур (до 350 °С) и постоянных механических нагрузок проявляется ползучесть материала, потенциально ведущая к потере герметизирующих свойств [1]. Для описания релаксации контактных давлений в радиальном уплотнении возможно использование различных механических моделей. Сравнение таких моделей при имитации эксплуатации премиального резьбового соединения собственной разработки приводится в данной работе.

1. Экспериментальное и теоретическое исследование ползучести

1.1. Проведение испытаний на ползучесть

Для получения кривых ползучести при различных температурах, в лаборатории «Гибридные наноструктурные материалы» НИТУ МИСИС были проведены испытания на одноосное растяжение с выдержкой 300 часов. Данные были получены при 150 °С, 250 °С и 350 °С при уровне напряжения, соответствующем 95 % от минимального предела текучести, полученного при предварительных статических испытаниях на одноосное растяжение в условиях АО «Выксунский металлургический завод». Данный уровень напряжений соответствует уровню эквивалентных напряжений по Мизесу, для которого проводятся комплексные квалификационные испытания резьбовых соединений труб нефтегазового сортамента [2]. Для испытаний были использованы образцы, вырезанные из муфтовой заготовки, из которой в дальнейшем были изготовлены образцы премиального резьбового соединения ОМК VEGA [3]. Образцы для испытаний и испытательная машина Instron M3 представлены на рис. 1.



Рис. 1. Машина для испытаний на ползучесть и испытательные образцы

1.2. Подбор параметров модели ползучести

В ходе испытаний было выявлено, что при температуре 350 °С кривая обладает как первичной, так и вторичной стадиями ползучести, тогда как для остальных двух кривых нет характерной первичной стадии. В связи с этим, для возможности описания обеих стадий, была выбрана модель деформационного упрочнения. Эта модель построена на основе степенного закона Нортона [4] с учетом накопленной деформации ползучести и температурной зависимости:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = C_1 \sigma_{\text{экв}}^{C_2} \varepsilon_c^{C_3} \exp\left(-\frac{C_4}{T}\right), \quad (1)$$

где ε_c — эквивалентная деформация ползучести; $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное напряжение, МПа; T — температура, К; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, которые подбираются на основе экспериментальных данных, причем $C_4 = Q/R$ (Q — энергия активация, Дж; R — газовая постоянная, Дж/(моль·К)).

Для подбора параметров уравнения (1) был реализован следующий алгоритм:

- 1) численно решается нелинейное дифференциальное уравнение (1) для каждого набора постоянных методом Рунге — Кутты 4-го порядка;
- 2) оптимизация методом наименьших квадратов:

$$f = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \varepsilon_i^{\text{мод}}(C_1, C_2, C_3, C_4))^2 \rightarrow \min,$$

где $\varepsilon_i^{\text{эксп}}$ — экспериментальное значение деформации ползучести для i -й точки кривой; $\varepsilon_i^{\text{мод}}(C_1, C_2, C_3, C_4)$ — значение модели деформационного упрочнения для i -й точки кривой.

- 3) вычисление коэффициента детерминации для оценки дисперсии, объясненной моделью:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \varepsilon_i^{\text{мод}})^2}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^{\text{эксп}} - \bar{\varepsilon}^{\text{эксп}})^2}, \quad \bar{\varepsilon}^{\text{эксп}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{\text{эксп}}. \quad (2)$$

Экспериментальные данные и кривые, полученные при помощи модели деформационного упрочнения представлены на рис. 2. Коэффициенты детерминации для кривых 350 °С, 250 °С и 150 °С составляют 0.99, 0.43 и 0.01 соответственно. Такие низкие значения для кривых 250 °С и 150 °С объясняются тем, что при таких температурах на заданном интервале выдержки ползучесть проявляется незначительно и погрешность оборудования вносит определенный разброс данных, которые сложно описать единым законом (1). Стоит отметить, что в рамках данного исследования наибольший интерес представляет именно кривая при температуре 350 °С как наиболее критичный режим нагружения резьбового соединения. При этом если исключить из (1) температурную зависимость и подбирать параметры C_1 , C_2 , C_3 каждой кривой отдельно, можно существенно увеличить качество аппроксимации.

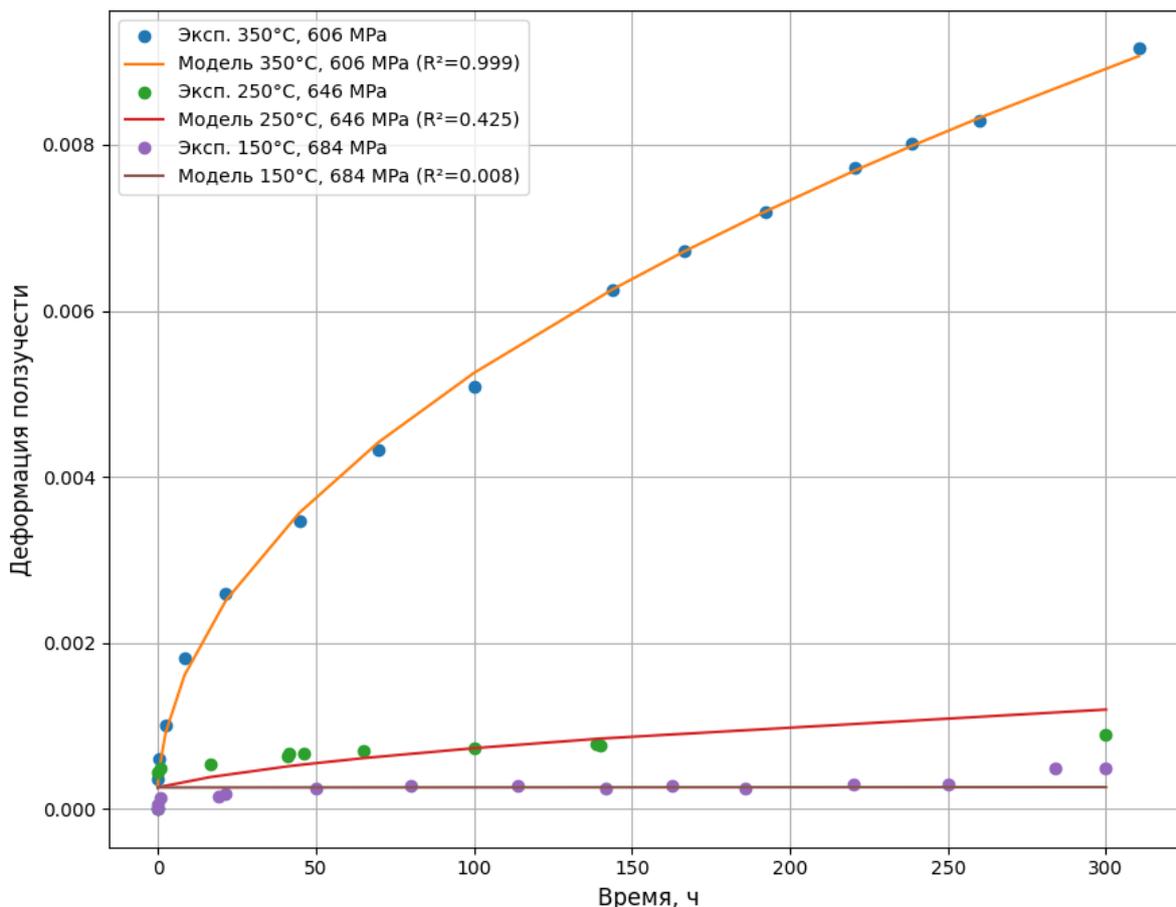


Рис. 2. Экспериментальные данные и кривые, полученные с помощью модели деформационного упрочнения

Для проверки корректности подбора параметров, было проведено моделирование условий испытаний методом конечных элементов (МКЭ). Была построена конечно-элементная модель четверти цилиндрического образца в осесимметричной постановке. Распределение деформаций ползучести в конечно-элементной модели и сравнение экспериментальной и теоретической кривой для температуры 350 °С представлены на рис. 3.

2. Сравнение модели деформационного упрочнения и модели Максвелла — Вихерта для оценки герметичности премиального резьбового соединения

Для анализа герметичности резьбового соединения класса «Премиум» необходимо оценить релаксацию контактных давлений в радиальном уплотнении вследствие ползучести. Для

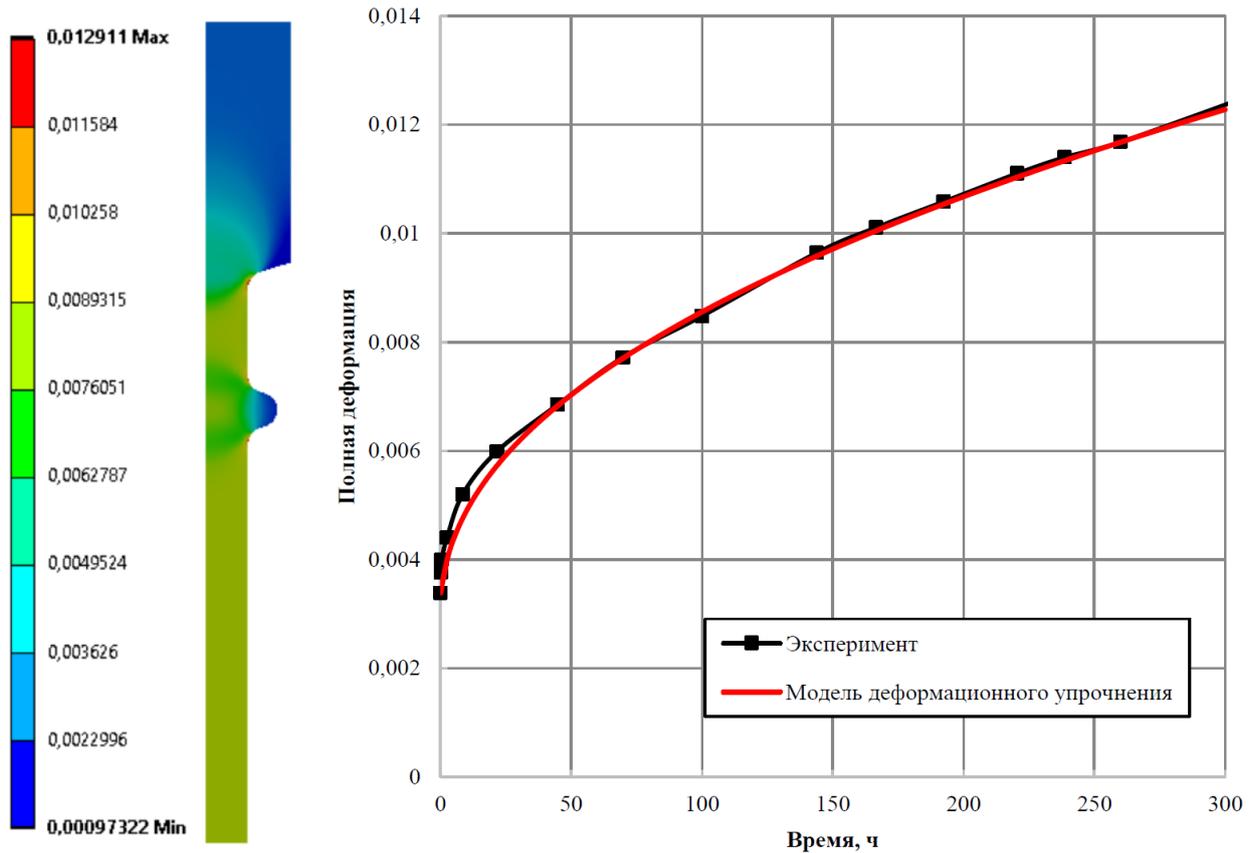


Рис. 3. Распределение эквивалентных деформаций ползучести в модели и сравнение экспериментальной и расчётной кривых

этого была построена осесимметричная модель резьбового соединения ОМК VEGA собственной разработки в программном комплексе ANSYS. На торце трубы была приложена осевая нагрузка. В центральной части муфты были заданы условия симметрии. На внутренней поверхности трубы и муфты, по поверхностям упорного торца ниппеля и упора раструба было задано внутреннее давление. Для поверхности радиального уплотнения был задан алгоритм давления проникновения, который реализует приложение давления исходя из уровня контактных давлений. Для его реализации был написан скрипт на языке APDL. Нагружение проводилось в несколько этапов:

- 1) вывод контактных поверхностей модели из перекрытия;
- 2) приложение нагрузки растяжения и внутреннего давления (самый критичный режим испытаний);
- 3) выдержка нагрузки в течении заданного промежутка времени.

Величины нагрузок подбирались в упругой области эллипса текучести по Мизесу, построенного в координатах «осевая нагрузка-внутреннее давление». Этап нагружения 2 представлен стрелкой на рис. 4.

Для оценки влияния ползучести на релаксацию контактных давлений было проведено сравнение двух моделей: модель деформационного упрочнения (1) и модель Максвелла–Вихерта для вязкоупругого тела, описанная в работе [1]. Данная модель основана на представлении модуля релаксации в виде рядов Прони. Для определения параметров решается следующее уравнение:

$$\alpha E_0 T_{ij} m_j = e_j, \quad (3)$$

где α — калибровочный коэффициент; E_0 — мгновенный модуль упругости; T_{ij} — компоненты тензора времен релаксации, m_j — компоненты тензора безразмерных параметров Прони, e_j — компоненты тензора изменения мгновенного модуля.

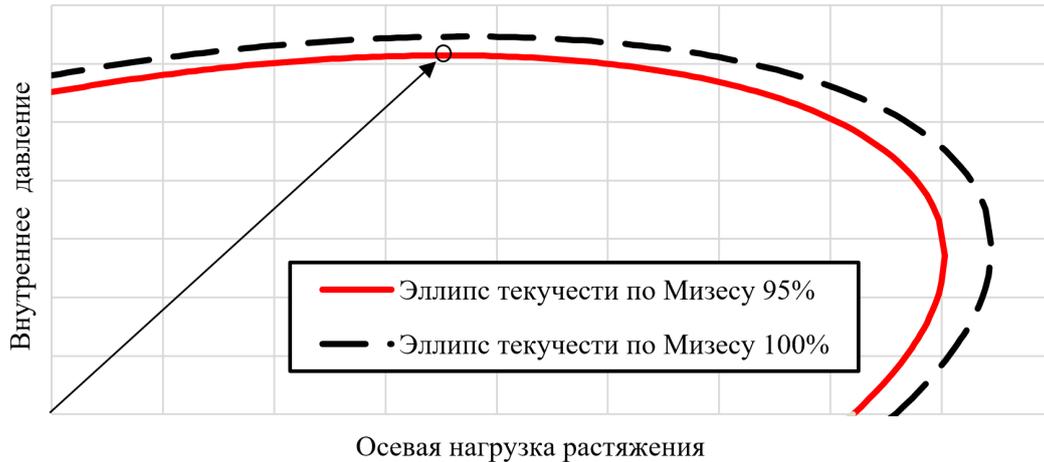


Рис. 4. Эллипс текучести по Мизесу и выбранное сочетание нагрузок для оценки герметичности

Метод Монте-Карло применялся для определения оптимального числа точек $n = 6$ для решения уравнения (3). Дальнейшее увеличение числа точек не влияет на качество аппроксимации. Стоит отметить, что данная модель является линейной и не позволяет описывать нелинейные эффекты. В том числе по этой причине для соответствия параметров применялся калибровочный коэффициент $\alpha = 1,06$.

Для оценки герметичности был введен следующий критерий по газонепроницаемости, основанный на анализе распределения контактных давлений в уплотнительном узле [5]:

$$n_g = W_a / W_{ac}, \quad W_a = \int_{-w_s}^{w_s} p(x)^k dx, \quad W_{ac} = B(q / p_a)^m, \quad (4)$$

где $p(x)$ — распределение контактного давления в определенный момент времени; w_s — полуширина контактной зоны, мм; параметры для случая отсутствия резьбоуплотнительной смазки (соответствует методике испытаний [2] при использовании процедуры прогрева образца): $k = 1.4$, $m = 0.838$, $B = 10 \text{ МПа}^k \cdot \text{мм}$; q — заданное давление, МПа; p_a — атмосферное давление, МПа.

Результаты конечно-элементного моделирования с учетом двух подходов представлены на рис. 5.

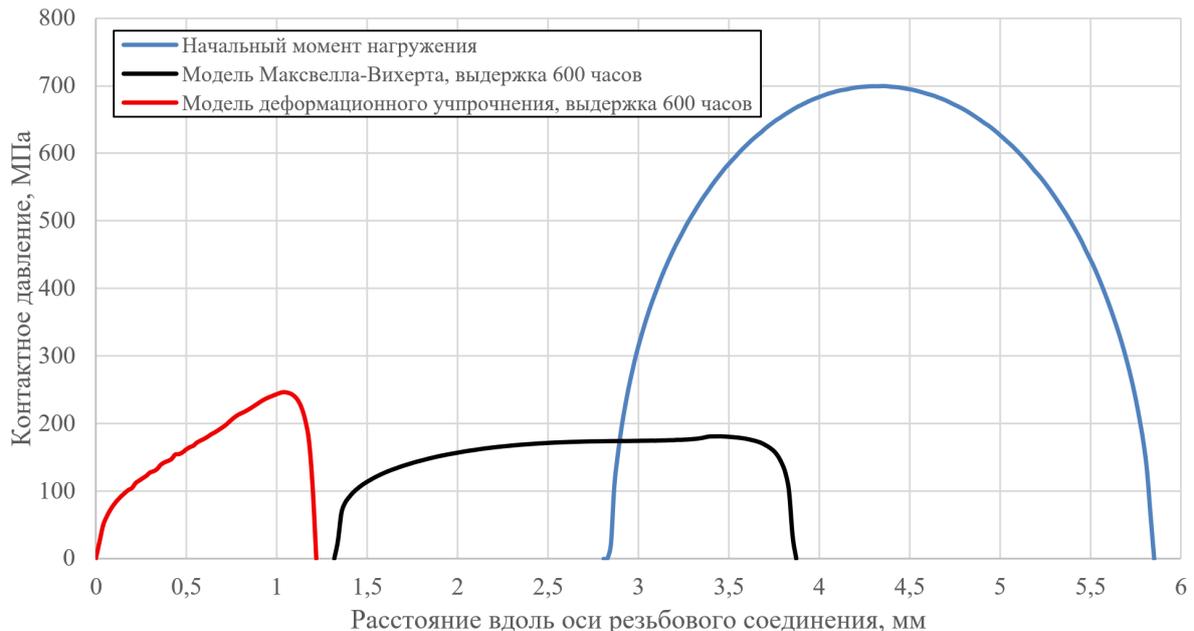


Рис. 5. Распределение контактных давлений на уплотнительной поверхности в начальный момент нагружения и после выдержки 600 часов для двух моделей

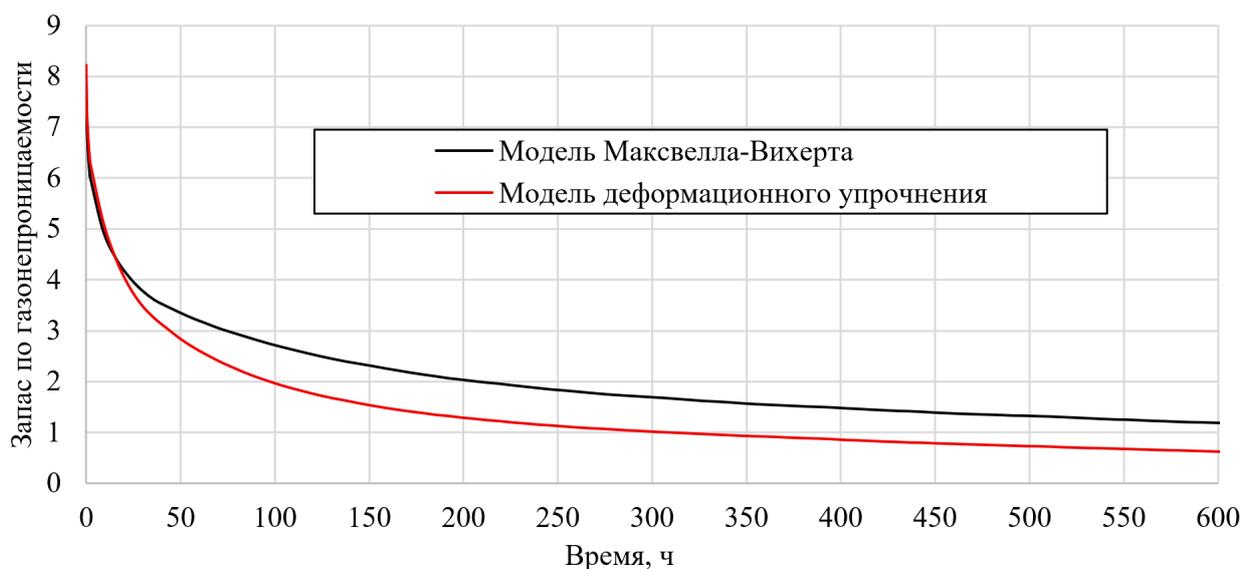


Рис. 6. Изменение запаса по газонепроницаемости при выдержке с нагрузкой растяжением и внутренним давлением

Анализируя рис. 5, можно заключить, что смещение пятна контакта для модели деформационного упрочнения значительно выше, чем для модели Максвелла — Вихерта. При этом ширина контактной зоны также уменьшается значительно сильнее, тогда как максимальное значение контактных давлений выходит примерно на один уровень. Из рис. 6 видно, что падение запаса по газонепроницаемости в течении 600 часов составляет 92 % для модели деформационного упрочнения и 85 % для модели Максвелла — Вихерта. При этом важно отметить, что в случае применения модели деформационного упрочнения, согласно критерию (4), конструкция должна терять герметичность уже после 300 часов непрерывного нагружения.

Заключение

В работе представлены результаты исследования ползучести труб нефтегазового сортамента производства АО «Выксунский металлургический завод» и представлена аппроксимация полученных кривых ползучести при помощи модели деформационного упрочнения и вязкоупругой модели Максвелла — Вихерта. Также при помощи количественной оценки герметичности показано, что модель деформационного упрочнения дает наиболее консервативную оценку по ресурсу резьбового соединения. Полученные результаты можно использовать при проектировании резьбовых соединений класса «Премиум» и оценки их эксплуатационной способности.

Литература

1. Стрелков К. С. Влияние ползучести на герметичность резьбовых соединений класса «Премиум» / К. С. Стрелков, А. Л. Попов. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф. – Воронеж, 4–6 дек. 2024 г. – С. 687–694.
2. ГОСТ Р ИСО 13679–2023. Трубы стальные обсадные и насосно-компрессорные для нефтяной и газовой промышленности. Методы испытаний резьбовых соединений : Межгосударственный стандарт : дата введения 2024-03-21 / Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва : Российский институт стандартизации, 2023. – 197 с.

3. Никифоров Д. В., Стрелков К. С. Резьбовое соединение трубных изделий нефтепромыслового сортамента : пат. № 2767871 РФ. – опубл. 22.03.2022. – Бюл. № 9.
4. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учебник для вузов / Н. Н. Малинин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 1975. – 398 с.
5. Xie J. Numerical evaluation of tubular connections for HPHT applications / J. Xie // Proceedings of the Baosteel Conference. – Shanghai, 4–6 January 2013 – P. 6–14.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ФРАКТАЛА НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ЗАТУХАЮЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

А. И. Сумин¹, А. Л. Фролов¹, Р. С. Сумина¹, О. А. Фролова²

¹Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

²Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы устойчивости нелинейно-вязкоупругих сред с затухающей памятью в задачах механики деформируемого твердого тела, по отношению к наложенным конечным деформациям. После наложения на основной процесс деформирования конечных деформаций, линеаризации полученных соотношений не производится. Возмущения перемещений представляются в виде рядов по собственным функциям, относительно которых предполагается, что они являются решениями соответствующих линеаризованных уравнений, и удовлетворяют геометрическим граничным условиям для линеаризованных задач. После составления вариационных уравнений принципа возможных перемещений задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для полученной системы строится функция, которая, при определенных ограничениях на начальные возмущения будет функцией Ляпунова. Для нахождения размерности странного аттрактора полученной динамической системы используются найденные бифуркационные значения для амплитуд возмущений перемещений.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейная вязкоупругая среда, конечные возмущения, странный аттрактор.

Основные соотношения для нелинейно-вязкоупругой среды возьмем в виде [1]. Следуя [2, 3] рассмотрим три состояния тела: первое — естественное, когда в сплошной среде отсутствуют напряжения и деформации, а температура не зависит от времени и координат. Второе получается из первого под действием постоянных во времени механических и тепловых нагрузок по истечении времени, достаточного для того, чтобы в теле полностью закончились процессы ползучести и релаксации. Величины этого состояния отметим ноликом вверху, причем они не зависят от времени. Третье состояние движения достигается термомеханическим возмущением второго состояния. Все величины этого состояния будем отмечать штрихом, и представлять в виде суммы величин, относящихся ко второму состоянию и возмущений соответствующих величин. Возмущения будем считать малыми, но конечными и не будем их отмечать никаким индексом. Линеаризации соответствующих уравнений проводить не будем.

Третье состояние характеризуется:

– вектором перемещений

$$u' = u + u^0,$$

– тензором деформаций

$$E' = E + E^0,$$

– тензором напряжений

$$S' = S + S^0,$$

– температурой

$$\theta' = \theta + \theta^0$$

и т. д.

Представим соотношения термомеханики в декартовых координатах $\overset{0}{0}$ естественного состояния. Конечная начальная деформация, отвечающая перемещению $u = u$, определяется по формулам [1], в которых надо поставить нолики над всеми величинами. Этим же соотношениям удовлетворяют и величины со штрихами. Учитывая это можно получить соотношения для возмущений, считая, что величины с ноликом известны. В результате получаем соотношения для возмущений тензора деформаций и инвариантов тензора деформаций

$$E = E(1) + E(2),$$

$$E(1) = \frac{1}{2}(H + H^T + \overset{0}{H} \overset{0}{H} + H^T \overset{0}{H}), \quad E(2) = \frac{1}{2}H^T H, \quad (1)$$

$$J_1(E) = \sum_{i=1}^2 J_1(i), \quad J_2(E) = \sum_{i=1}^4 J_2(i), \quad J_3(E) = \sum_{i=1}^6 J_3(i).$$

Для возмущений тензора напряжений получим соотношения

$$S = \sum_{i=1}^N S^\infty(i), \quad S = T_* / \rho_R, \quad (2)$$

где T_* — второй тензор напряжений Пиолы — Киргоффа, а реологическая связь в возмущениях берется в виде [1].

Уравнения движения и граничные условия в возмущениях примут вид

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) T_{*kj} + T_{*kj}^0 \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + T_{*kj} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right] + \rho_R b_i = \rho_R \ddot{x}_i, \quad (3)$$

$$\left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) T_{*kj} + T_{*kj}^0 \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + T_{*kj} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right] n_{rj} = p_i.$$

Следуя [4] составим вариационные уравнения метода Бубнова — Галеркина, соответствующие нелинейной краевой задаче (1)–(3).

Решение нелинейной краевой задачи будем искать в виде

$$u_i(X_k, t) = f_{nm}(t) \varphi_{inm}(X_k), \quad (4)$$

$$\theta \left(t, \overset{0}{E}, \overset{0}{\theta}, X_k \right) = f^{(0)}(t) \psi \left(\overset{0}{E}, \overset{0}{\theta}, X_k \right),$$

где функции φ и ψ выбираются как известные решения линеаризованных задач.

Если рассмотреть несвязанную задачу термовязкоупругости, то общая задача распадается на решение задачи теплопроводности и решение задачи термовязкоупругости, в которой механические свойства материала считаются зависящими от температуры и начальных деформаций.

Используя (4) получим систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитуд возмущений

$$A\ddot{f} + B(\dot{f}) + C(f)f + D(\dot{\theta}) + L(\dot{\theta})f + K_1 f + K_2 \dot{f}f + K_3 \dot{f}\dot{f}f + \dots = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты имеют следующий вид

$$A = \int_V \varphi \varphi^T dV,$$

$$B(\dot{f}) = \int_{-\infty}^t \dot{f} \int_V \left[(I + H_0) \overset{0}{E} H \right] dV G^{(1)} d\tau,$$

$$C(f) = \int_{-\infty}^t \dot{f} \int_V H \overset{0}{E} H dV G^{(1)} d\tau,$$

$$D(\dot{f}) = \int_{-\infty}^t \dot{\theta} \int_V \left[(I + H^0) \psi H \right] dV G^{(2)} d\tau, \quad (6)$$

$$L(\dot{f}) = \int_{-\infty}^t \dot{\theta} \int_V \psi H dV G^{(1)} d\tau,$$

$$K_1 = \int_V \left[(I + H^0) S^{(1)} + S^{(0)} H \right] H dV,$$

$$K_2 = \int_V \left[(I + H^0) S^{(2)} + S^{(1)} H \right] H dV,$$

$$K_3 = \int_V \left[(I + H^0) S^{(3)} + S^{(2)} H \right] H dV,$$

а f представляет собой вектор $f = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{nm}\}$.

Введем функцию

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} A \ddot{f} \ddot{f} + \frac{1}{2} K_1 \dot{f} \dot{f} + \frac{1}{3} K_2 \dot{f} \dot{f} \dot{f} + \frac{1}{4} K_3 \dot{f} \dot{f} \dot{f} \dot{f} + \dots + \\ & + \int_{-\infty}^t B(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t C(\dot{f}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t D(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau + \int_{-\infty}^t L(\dot{\theta}) \dot{f} d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Если функция (7) будет положительно определенной для тех значений начальных координат и скоростей, которые не превосходят величин, найденных из соотношений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{f}} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0, \quad (8)$$

то согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение системы (5) будет устойчиво в этой области, так как производная от функции (7) в силу системы (5) будет отрицательна.

Из соотношений (8) находится конечная цепочка бифуркационных значений $\{f_{nm}\}$, из которых вначале реализуется минимальное. По сценарию Рюэля — Такенса [5, 6], динамическая стохастичность в нелинейной системе может развиться после конечной последовательности бифуркаций, которые обеспечивают достижение хаотического режима. Последовательность $\{f_{nm}\}$ может быть использована для вычисления корреляционной размерности фрактала. Компьютерные алгоритмы вычисления размерности Минковского d опираются на соотношение

$$\log N(\varepsilon) = \log C - d \log \varepsilon,$$

где $N(\varepsilon)$ — минимальное число клеток со стороной ε , необходимых для покрытия фрактала, C — константа. Приближение находится по методу наименьших квадратов [7].

Найденная размерность фрактала позволяет вычислить размерность фазового пространства динамической системы, которое моделирует процессы, происходящие в первоначальной системе и тем самым ограничить количество слагаемых в рядах (4) размерностью пространства, в которое вложен фрактал.

Литература

1. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 288 с.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев : Наук. думка, 1973. – 274 с.
3. *Карнаухов В. Г.* Термодинамика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.

4. Спорыхин А. Н. Иерархия устойчивых состояний в механике нелинейных сред / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин. – Воронеж : Воронежский государственный университет. 1999. – 210 с.
5. Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М. : Наука, 1987. – 424 с.
6. Takens F. Detecting strange attractor in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence. – Springer-Verlag, 1981. – P.366–381.
7. Кроневер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Москва : Постмаркет, 2000. – 352 с.

УРАВНЕНИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМИРОВАНИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

А. Д. Чернышов¹, О. Ю. Никифорова¹, В. В. Горяйнов²

¹Воронежский государственный университет инженерных технологий

²Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Впервые получены уравнения согласования граничных условий в углах криволинейной пластины, выполнение которых необходимо для получения решения. Система уравнений согласования граничных условий получается с помощью выполнения условий непрерывности перемещений и их производных различного порядка при подходе к углу по одной и затем по другой стороне данного угла. Невыполнение уравнений согласования граничных условий при постановке задачи приводит к большим неустрашимым ошибкам.

Ключевые слова: криволинейная пластина, уравнения согласования граничных условий, быстрые разложения, аналитическое решение, бигармоническое уравнение.

Введение

Существуют работы, где отмечается важность выполнения условий согласования при решении краевых задач [1–9]. Наличие разрывов противоречит физическому смыслу и потому необходимо выполнение уравнений согласования граничных условий (УРСГУ). Невыполнение УРСГУ приводит к разрывам, неустрашимым погрешностям, появлением негативного эффекта Гиббса [10, 11] и неудовлетворительной сходимости рядов Фурье. При дифференцировании разрывной функции возникает большая неустрашимая погрешность. Выполнение УРСГУ позволяет устранить подобные недостатки.

Задача о напряженно деформированном состоянии упругой пластины криволинейной формы имеет большое значение при разработке различных инженерных конструкций [12]. Из решений двумерных задач для неоднородного бигармонического уравнения равновесия упругой пластины следует отметить монографию [12], где рассмотрено много различных вариантов закрепления границы прямоугольной пластины. Граничные условия во всех задачах в [12] записаны однородными и потому удовлетворяют условиям УРСГУ. Решения получаются с высокой точностью. В работе [13] предложен альтернативный разностному и вариационно-разностному метод решения задач с эллиптическим оператором второго порядка в области, состоящей из совокупности прямоугольников. При этом выполнение УРСГУ для каждого прямоугольника в его углах, а также возможность многократного дифференцирования рядов и погрешность, не обсуждаются. В решениях задач с трещинами, когда область сложная, в [14] и других работах с трещинами УРСГУ не приводятся. В настоящей работе впервые будут записаны в явном виде УРСГУ в углах криволинейной границы.

Постановка задачи для криволинейной упругой пластины

Область криволинейной упругой пластины $\tilde{\Omega}$ зададим неравенствами:

$$\tilde{\Omega}(-a \leq x \leq a, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), f_1(x) < f_2(x)). \quad (1)$$

С двух сторон пластина $\tilde{\Omega}$ ограничена прямыми $x = -a$, $x = a$, две другие стороны криволинейные

$$y = f_1(x), y = f_2(x), f_1(x) < f_2(x), (f_1(x), f_2(x)) \in C^{(6)}(-a \leq x \leq a).$$

Запишем неоднородное бигармоническое дифференциальное уравнение равновесия упругой пластины

$$\frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial y^4} = \frac{Q(x, y)}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2)$$

Здесь $Q(x, y)$ — нагрузка по нормали к поверхности пластины, D — изгибная жесткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины.

В дальнейшем для упрощения записи формул и вычислений функцию $U(x, y)$ будем записывать без указания переменных x, y , т. е. в виде $U(x, y) = U$ за исключением случаев, когда координаты (x, y) принимают конкретные значения. Также с целью упрощения записи выражений там, где будет встречаться индекс k , не будем указывать каждый раз, что k принимает только значения $k = 1, 2$. Значение $k = 1$ указывает на принадлежность выражения к нижней стороне пластины, при $k = 2$ — к его верхней стороне.

На каждой из четырех частей границы $\tilde{\Gamma}$ области $\tilde{\Omega}$ для U зададим по два условия — значение U и ее нормальную к $\tilde{\Gamma}$ производную:

$$(x, y) \in \tilde{\Omega}, \quad U|_{x=-a} = \varphi_3(y), \quad U|_{x=a} = \varphi_4(y). \quad (3)$$

$$\partial U / \partial x|_{x=-a} = \psi_3(y), \quad \partial U / \partial x|_{x=a} = \psi_4(y). \quad (4)$$

$$U|_{y=f_k(x)} = \varphi_k(x), \quad (\partial U / \partial \mathbf{n}_k)|_{y=f_k(x)} = \psi_k(x), \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_k = (-f'_k(x)/N_k, 1/N_k), \quad N_k = \sqrt{1 + (f'_k(x))^2}, \quad (6)$$

где $(\varphi_1 \div \varphi_4, \psi_1 \div \psi_4) \in C^{(6)}(\tilde{\Omega})$, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — единичные векторы нормалей к границам $y = f_k(x)$, направленные в сторону $y > f_k(x)$. Вектор \mathbf{n}_1 направлен внутрь $\tilde{\Omega}$, вектор \mathbf{n}_2 — наружу.

Вывод уравнений согласования граничных условий (УРСГУ)

Определение УРСГУ: уравнениями согласования граничных условий (3)–(5) будем называть дополнительные равенства, содержащие только заданные функции из постановки задачи (1)–(6).

Выполнение УРСГУ накладывают дополнительные ограничения на допустимые задания граничных условий (3)–(5). Если УРСГУ не выполняются, то в постановке задачи в граничных условиях будут использованы разрывные функции и потому решение потеряет гладкость. Кроме того, задание граничных условий непрерывными согласуется с физическим смыслом задачи.

Задание области $\tilde{\Omega}$ в виде (1) предполагает наличие на её границе $\tilde{\Gamma}$ четырех углов с координатами $x = \pm a, y = f_k(\pm a)$. Из условий непрерывности перемещений в углах $\tilde{\Gamma}$ запишем первые четыре УРСГУ:

$$\varphi_3(f_k(-a)) = \varphi_k(-a), \quad \varphi_4(f_k(a)) = \varphi_k(a). \quad (7)$$

Условия (7) имеют простой геометрический смысл: перемещения материальных точек пластины в углах должны быть непрерывными.

Дополнительно к (7) ниже получим еще восемь уравнений согласования между производными от перемещения в углах $\tilde{\Gamma}$ следующими рассмотрениями. На одной стороне угла в (3)–(6) задана функция U и её нормальная производная к данной стороне. Но производную от перемещения в таком же направлении имеем из граничного условия на другой стороне данного угла. Отсюда получаем одно уравнение согласования. Для каждого угла будем иметь по два подобных условия согласования — для частной производной по x и для частной производной по y , т. е. всего 8. Получение указанных УРСГУ в явном виде выполним следующими математическими действиями.

Построим четыре УРСГУ из условия непрерывности производной $\partial U/\partial x$ в каждом углу границы $\tilde{\Gamma}$. Вычислим производную по x от функции U как сложную функцию, заданной в условиях (5):

$$d\left(U\Big|_{y=f_k(x)}\right)/dx = \left(\partial U/\partial x + f'_k(x)\partial U/\partial y\right)\Big|_{y=f_k(x)}. \quad (8)$$

Штрихом в (8) и в дальнейшем будем обозначать производную по той единственной переменной x , или y , от которой зависит данная функция.

Продифференцируем по x левую и правую части граничных условий (5) с учетом формулы (8):

$$\left(\partial U/\partial x + f'_k(x)(\partial U/\partial y)\right)\Big|_{y=f_k(x)} = \varphi'_k(x). \quad (9)$$

Для подстановки в (9) производную $\partial U/\partial y$ при $x = \pm a$ вычислим с помощью дифференцирования по y условий (3):

$$\partial U/\partial y\Big|_{x=-a} = \varphi'_3(y), \quad \partial U/\partial y\Big|_{x=a} = \varphi'_4(y). \quad (10)$$

После подстановки производных $\partial U/\partial x$ из (4) и $\partial U/\partial y$ из (10) в уравнение (9) получим дополнительно к (7) четыре УРСГУ:

$$\begin{aligned} \text{при } x = -a &\Rightarrow \psi_3(f_k(-a)) + f'_k(-a)\varphi'_3(f_k(-a)) = \varphi'_k(-a), \\ \text{при } x = a &\Rightarrow \psi_4(f_k(a)) + f'_k(a)\varphi'_4(f_k(a)) = \varphi'_k(a). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) совместно с (7) составляют восемь независимых УРСГУ.

Кроме (7) и (11) можно получить четыре УРСГУ, используя условия непрерывности производной $\partial U/\partial y$ в каждом углу границы $\tilde{\Gamma}$. Для этого второе равенство в (5) умножим на N_k и перепишем его в развернутом виде, используя формулы для векторов \mathbf{n}_k , приведенные в выражениях (6):

$$\left(-f'_k(x)\partial U/\partial x + \partial U/\partial y\right)\Big|_{y=f_k(x)} = N_k \psi_k(x). \quad (12)$$

Подставим в (12) производную $\partial U/\partial y$ из (10), производную $\partial U/\partial x$ возьмем из (4):

$$\begin{aligned} \left(-f'_k(x)\psi_3(y) + \varphi'_3(y) = N_k \psi_k(x)\right)\Big|_{y=f_k(x), x=-a}, \\ \left(-f'_k(x)\psi_4(y) + \varphi'_4(y) = N_k \psi_k(x)\right)\Big|_{y=f_k(x), x=a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Всего в (7), (11) и (13) записано 12 УРСГУ. Дополнительно 4 УРСГУ получим из условия непрерывности смешанной производной $\partial^2 U/\partial x \partial y$ в углах $\tilde{\Gamma}$. Для их получения продифференцируем равенство (12) по x , учитывая что в левой части (12) U сложная функция от x , так как $y = f_k(x)$:

$$\left(f'_k(x)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) + \left(1 - (f'_k(x))^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - f''_k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)\Big|_{y=f_k(x)} = N'_k \psi_k(x) + N_k \psi'_k(x). \quad (14)$$

В (14) все производные от U следует выразить через функции из граничных условий (3)–(5). Для подстановки в (14) производную $\partial^2 U/\partial x^2$ найдем, дифференцируя по x равенство (9):

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f''_k(x)\frac{\partial U}{\partial y} + f'_k(x)\left(f'_k(x)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)\right)\Big|_{y=f_k(x)} = \varphi''_k(x). \quad (15)$$

Уравнение (15) разрешим относительно $\partial^2 U/\partial x^2$:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi''_k(x) - f''_k(x)\frac{\partial U}{\partial y} - f'_k(x)\left(f'_k(x)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)\right)\Big|_{y=f_k(x)}. \quad (16)$$

Подставим $\partial^2 U/\partial x^2$ из (16) в (14) и приведем подобные члены

$$\left(\begin{aligned} & f'_k(x) \left(f''_k(x) \frac{\partial U}{\partial y} - \varphi''_k(x) \right) + \left(1 + (f'_k(x))^2 \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + f'_k(x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - f''_k(x) \frac{\partial U}{\partial x} = \end{aligned} \right) \Bigg|_{y=f_k(x)} \quad (17)$$

$$= N'_k \psi_k(x) + N_k \psi'_k(x)$$

Для подстановки в (17) производную $\partial U/\partial x$ возьмем из (4), производные $\partial U/\partial y$ и $\partial^2 U/\partial y^2$ найдем дифференцированием по y условие (3):

$$\begin{aligned} (\partial U/\partial y)|_{x=-a} &= \varphi'_3(y), \quad (\partial U/\partial y)|_{x=a} = \varphi'_4(y), \\ (\partial^2 U/\partial y^2)|_{x=-a} &= \varphi''_3(y), \quad (\partial^2 U/\partial y^2)|_{x=a} = \varphi''_4(y). \end{aligned} \quad (18)$$

Смешанную производную $\partial^2 U/\partial x \partial y$ вычислим дифференцированием по y условие (4):

$$\partial^2 U(-a, y)/\partial x \partial y = \psi'_3(y), \quad \partial^2 U(a, y)/\partial x \partial y = \psi'_4(y). \quad (19)$$

После подстановок в (17) производных $\partial U/\partial x$ из (4), $\partial U/\partial y$ и $\partial^2 U/\partial y^2$ из (18), $\partial^2 U/\partial x \partial y$ из (19) получим дополнительные четыре УРСГУ:

$$\left(\begin{aligned} & f'_k(x) (f''_k(x) \varphi'_3(y) - \varphi''_k(x)) - f''_k(x) \psi_3(y) + \\ & + \left(1 + (f'_k(x))^2 \right) (\psi'_3(y) + f'_k(x) \varphi''_3(y)) = N'_k \psi_k(x) + N_k \psi'_k(x) \end{aligned} \right) \Bigg|_{y=f_k(-a), x=-a} \quad (20)$$

$$\left(\begin{aligned} & f'_k(x) (f''_k(x) \varphi'_4(y) - \varphi''_k(x)) - f''_k(x) \psi_4(y) + \\ & + \left(1 + (f'_k(x))^2 \right) (\psi'_4(y) + f'_k(x) \varphi''_4(y)) = N'_k \psi_k(x) + N_k \psi'_k(x) \end{aligned} \right) \Bigg|_{y=f_k(a), x=a}$$

Равенства (9) и (11) означают, что угол наклона срединной поверхности пластины в направлениях x и y , вычисленный в углах по данным из граничных условий как на одной стороне, так и на другой стороне угла, должен быть одинаковым. При выполнении УРСГУ (20) предполагается, что закрутка, вычисленная по данным на одной стороне угла, так и по данным на другой стороне угла, должна быть одинаковой.

Некоторые УРСГУ имеют непростой вид, особенно (20). Однако если не выполнять условия (20), то разрывными будут производные второго порядка. Такое «решение» нельзя будет подставлять в дифференциальное уравнение (2) четвертого порядка и потому оно не будет являться решением. Такая же ситуация возникает и при невыполнении условий (7), или (9), (11). Выполнение полученных шестнадцати УРСГУ (7), (9), (11) и (20), совместное использование быстрого разложения с граничной функцией $M_6(x, y)$ шестого порядка позволяют получить решение задачи с высокой точностью, допускающим вычисление производных до шестого порядка включительно [15].

Один из признаков существования неучтенных УРСГУ. Если при подстановке полученного решения задачи каким-либо способом в уравнение равновесия (2) и в граничные условия (3)–(5) получается большая невязка, особенно в углах пластины $\tilde{\Omega}$, то это будет являться признаком возможного существования неучтенных в постановке задачи УРСГУ. Например, в работах С. П. Тимошенко все подобные уравнения согласования выполнены, так как граничные условия взяты нулевыми, и потому полученные частные решения имеют высокую точность.

Заключение

При постановке задачи необходимо вначале проверить выполнение 16 УРСГУ из (7), (9), (11) и (20) и после этого приступить к построению решения каким-либо выбранным методом.

Система УРСГУ получается с помощью выполнения условий непрерывности перемещений и их производных различного порядка при подходе к углу по одной и затем по другой стороне данного угла.

Необходимость в написании УРСГУ возникает, если граница $\tilde{\Gamma}$ области $\tilde{\Omega}$ имеет углы и на каждой стороне угла граничные условия записаны отдельно.

Если же УРСГУ не учитываются, то в углах $\tilde{\Gamma}$ возникают разрывы. Это приведет к появлению эффекта Гиббса и затем при вычислении производных к большим неустрашимым погрешностям. Неустрашимость заключается в том, что ни измельчение шага на промежутке $x \in [-a, a]$, ни увеличение числа учитываемых членов в рядах Фурье не приведут к устранению большой погрешности. Если же в постановке задачи граничные условия записаны с выполнением УРСГУ, то погрешность вычислений будет устранимой.

Из определения УРСГУ следует, что такие уравнения содержат только заданные функции из граничных условий, в них каждый член не содержит какие-либо другие вспомогательные функции и потому данные уравнения имеют однородный вид. В простейшем случае при задании граничных условий однородными все УРСГУ будут выполняться тождественно. Для области $\tilde{\Omega}$ с гладкой границей (эллипс, окружность, овал и т. д.) при отсутствии углов и задании граничных условий гладкими функциями проблема выполнения УРСГУ также отпадает.

В некоторых случаях УРСГУ могут оказаться простыми, в других — сложными, в зависимости от постановки задачи. Однако невыполнение УРСГУ неизбежно приведет к большим неустрашимым ошибкам.

Литература

1. Корзюк В. И. Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.

2. Корзюк В. И. Классические решения граничных задач с плохими условиями согласования заданных функций / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2015. – № 17 (214). – С. 85–87.

3. Пальцев Б. В. Об условиях сходимости метода с расщеплением граничных условий в пространствах Соболева высокой гладкости и условиях согласования для нестационарной задачи Стокса / Б. В. Пальцев // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 4. – С. 455–459.

4. Ильин В. А. Независимость оптимальных граничных управлений колебаниями струны от выбора точки согласования начальных и финальных условий / В. А. Ильин // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 420, № 1. – С. 18–21.

5. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, В. В. Горяйнов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 5. – С. 1288–1297.

6. Чернышов А. Д. О согласовании начальных, граничных условий и дифференциальных уравнений для получения гладких решений моделей с температурными свойствами / А. Д. Чернышов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3 (21). – С. 86–95.

7. Горяйнов В. В. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий / В. В. Горяйнов, М. И. Попов, А. Д. Чернышов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 5. – С. 113–130.

8. Чернышов А. Д. Исследование погрешности быстрой тригонометрической интерполяции при решении задачи о напряжениях в бруске / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, М. И. Попов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 1. – С. 115–128.

9. Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, M. I. Popov [et al.] // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. – 012146.

10. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. / К. Ланцош – М. Физматлит. – 1961. – С. 524.
11. *Иншаков Ю. М.* Исследование явления Гиббса для разрывных периодических сигналов / Ю. М. Иншаков // Известия вузов России. Радиоэлектроника. – 2012. – Вып. 4. – С. 17–23.
12. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М. : Наука, 1966. – 636 с.
13. *Смелов В. В.* Об обобщенном решении двумерной эллиптической задачи с кусочно-постоянными коэффициентами на основе расщепления дифференциального оператора и использования специфических базисных функций / В. В. Смелов // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2003. – Т. 6, № 1. – С. 59–72.
14. *Дерюгин Е. Е.* Напряженно-деформированное состояние упругой пластины с трещиной / Е. Е. Дерюгин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2020. – Т. 63, № 11. – С. 3–8.
15. *Чернышов А. Д.* Прямоугольная пластина на упругом основании с произвольными граничными условиями и произвольной нагрузкой / А. Д. Чернышов, В. В. Горяинов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 4. – С. 202–226.

О ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СВОЙСТВ УПРУГОЙ И ПОРОУПРУГОЙ БАЛКИ В КЛАССЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

О. В. Явруян¹, В. О. Юров^{1,2}

¹Южный федеральный университет

²Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН

Аннотация. Рассмотрены оптимизационные задачи на податливость для консольной упругой и пороупругой балки с целью минимизации деформативности в задачах изгиба и растяжения. В качестве управляющих функций выступают механические свойства балки. Предложены подходы, в которых решения оптимизационных задач разыскиваются в классе дробно-рациональных функций, которые удовлетворяют необходимым условиям positivity и ограниченности на их средние значения либо в классе полиномов при ограничении их поведения сверху и снизу. Получены аналитические и полуаналитические выражения управляющих функций. Приведены численные результаты и осуществлено сравнение с соответствующими однородными случаями.

Ключевые слова: балка, неоднородность, модуль Юнга, функционально-градиентные материалы, оптимизация свойств, податливость, жесткость, пороупругость, дробно-рациональные функции, полиномы, генетический алгоритм.

Введение

Задачи оптимального проектирования элементов конструкций — балок, пластин, оболочек — одна из актуальных задач механики, позволяющая на этапе проектирования добиться улучшения эксплуатационных свойств конструкции. В зависимости от рассматриваемой задачи возможны различные постановки оптимизационных задач направленных на снижение веса конструкции, увеличение жесткости (податливости), увеличение или сохранение устойчивости, увеличение виброустойчивости, спектральные задачи, связанные с оптимизацией собственных частот элементов конструкций.

В качестве управляющих характеристик, за счет подбора которых удастся предложить объект, обеспечивающий оптимальное поведение конструкции, могут выступать как геометрические характеристики объекта (толщина, площадь поперечного сечения и др.) [1–3] так и механические свойства [4].

Надо отметить, что возможности решения оптимизационных задач второго типа особенно стали актуальны в связи с развитием новых технологий изготовления материалов с заранее заданными свойствами — композиты, функционально-градиентные материалы (ФГМ). Оптимизации свойств композитных материалов можно добиться как за счет комбинации элементов слоистых композитов, так и за счет определения толщин соответствующих слоев [5]. На первых порах именно композиты были объектами пристального внимания в большей части работ этого направления.

В дальнейшем, с появлением новых современных материалов и технологий создания функционально-градиентных материалов приобретает актуальность задача оптимального проектирования механических свойств ФГМ. Задачи оптимизации свойств ФГМ можно условно разделить на несколько направлений. Важное место среди них занимают задачи топологической оптимизации, которая направлена на выявление оптимального распределения массы с целью улучшения прочностных механических свойств [6–9]. Основные инструменты исследования — численные методы с использованием конечно-элементных пакетов и эвристические алгоритмы для определения оптимальных параметров.

Аналитические решения в оптимизационных задачах удается получить при некоторых допущениях, таких как поведение управляющих функций на границе [10–13], либо предположении о слабой неоднородности. Решения этих задач опираются на условия оптимальности, которые получаются из вариационных принципов с дальнейшим применением метода малых возмущений и метода линеаризации, либо непосредственным решением систем дифференциальных уравнений. Однако стоит отметить, что недостатком полученных аналитических решений, является их поведение на границе, в частности, оптимальные распределения модуля Юнга или жесткость обращаются в ноль на границе. При этом если вводить ограничения снизу на управляющие функции, то получаются кусочно-гладкие решения [13].

Получение гладких решений с учетом ограничений на минимальное значение жесткости возможно реализовать путем сужения класса функций.

В данной работе рассмотрена возможность получения аналитических решений в задаче оптимизации свойств неоднородных ФГ упругих и пороупругих стержней в классе дробно-рациональных функций, что исключает обращение соответствующих функций в ноль в какой-либо точке.

Также предложена схема решения оптимизационной задачи в классе полиномов второй степени, при дополнительном ограничении на управляющие функции снизу и сверху. Такой способ также позволяет избежать обращения в ноль оптимальных функций.

1. Модельная задача оптимизации свойств упругой консольной балки в классе дробно-рациональных функций

Рассмотрим в качестве примера модельную задачу об изгибе консольной упругой балки с переменной жесткостью в безразмерной постановке.

Обычно в литературе рассматривается постановка следующего вида

$$(Dw'')'' = q, \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad Dw''|_{x=1} = M_0, \quad (Dw'')'|_{x=1} = P_0, \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

где D — изгибная жесткость (может быть переменной за счет изменения поперечного сечения или модуля Юнга), q — распределенная нагрузка, P_0 — поперечная сила, M_0 — внешний изгибающий момент.

Рассмотрим частный случай задачи (1): $q = 0$, $P_0 = 0$. Дважды проинтегрировав, имеем следующую постановку

$$Dw'' = M_0, \quad w(0) = w'(0) = 0. \quad (2)$$

Для краевой задачи (2) задача оптимизации может быть записана в двух эквивалентных постановках:

А) $\int_0^1 D(x) dx = 1, \quad w(1) \rightarrow \min$

Б) $w(1) = \frac{1}{2}$ (прогиб однородной балки при $D = 1$), $\int_0^1 D(x) dx \rightarrow \min$.

Решение задачи (2) можно записать в квадратурах, а прогиб на конце соответственно определяется формулой $w(1) = \int_0^1 \frac{(1-x)}{D(x)} dx$. Известное по работам Баничука [1] точное решение задачи оптимизации А) имеет вид $D(x) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x}$ и обеспечивает $w(1) = \frac{4}{9}$, что на 11.(1) %

меньше, чем для однородного случая. В задаче Б) [1] получено решение $D(x) = \frac{4}{3}\sqrt{1-x}$ и в таком случае величина средней жесткости $\int_0^1 D(x) dx$ уменьшается на 11.(1) %.

Для получения вышеприведенных результатов было составлено уравнение Эйлера для следующей вариационной задачи

$$\int_0^1 \frac{(1-x)}{D(x)} dx + \lambda \left(\int_0^1 D(x) dx - 1 \right) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Приведенное решение имеет недостаток: $D(x) = 0$ при $x = 1$. Классические методы в таком случае предлагают учитывать ограничение на минимальное значение управляющей функции $D(x) \geq D_0$. В этом случае строятся кусочно-гладкие решения [2, 13].

Предлагается сузить класс функций до рациональных функций следующего вида $D(x) = \frac{1}{s(x)}$, где податливость $s(x)$ — полином. В этом случае решение (2) имеет вид:

$$w(x) = \int_0^x s(\xi)(x - \xi) d\xi \text{ и может быть всегда записано в явной форме.}$$

Рассмотрим задачу Б). Пусть $s(x) = ax + b$, тогда $w(x) = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2$. Из условия $w(1) = \frac{1}{2}$ найдем $b = 1 - \frac{a}{3}$;

Тогда минимизируемый интеграл примет вид

$$\int_0^1 D(x) dx = \int_0^1 \frac{3dx}{3ax + 3 - a} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{3 + 2a}{3 - a} \right|. \quad (4)$$

Выражение достигает свой минимум 0.9152 при $a = 1.1316$ ($b = 0.6228$). Полученное значение на 8.48 % меньше, чем в однородном случае. Причем решение так же, как и точное является убывающим, но не обращается в ноль на конце интервала $D(1) \approx 0.57$.

Пусть теперь $s(x) = ax^2 + bx + c$, тогда $w(x) = \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{2}x^2$. Из условия $w(1) = \frac{1}{2}$ найдем $c = 1 - \frac{a}{6} - \frac{b}{3}$.

Тогда минимизируемый интеграл примет вид

$$\int_0^1 \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int_0^1 \frac{dx}{ax^2 + bx + 1 - \frac{a}{6} - \frac{b}{3}} \rightarrow \min. \quad (5)$$

Задача (5) решена численно. Найдено решение $a = 2.3, b = -0.64$, которое доставляет значение (5) равное 0.8988, что на 10.12 % меньше, чем в однородном случае. Решение теперь является немонотонным, но также достигает своего минимального значения при $x = 1$, где $D(1) \approx 0.4$.

Поиск класса функций, для которых решение прямой задачи записывается в явном виде, позволяет сформулировать более простые задачи оптимизации с ограничением на минимум управляющей функции.

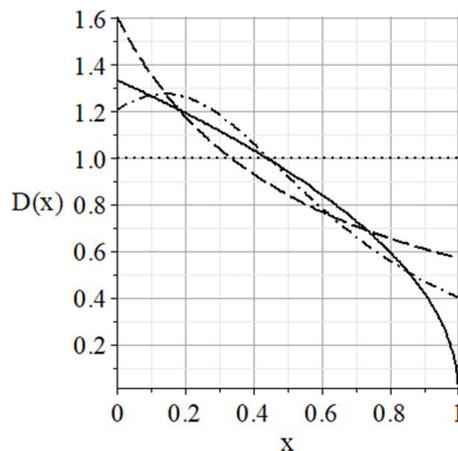


Рис. 1

На рис. 1 изображена жесткость $D(x)$ и отмечена: точками — в случае однородной балки, сплошной линией — случай точного оптимального решения $D(x) = \frac{4}{3}\sqrt{1-x}$ без ограничения снизу, пунктирной линией — случай $s(x) = ax + b$, штрихпунктирной — в случае $s(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Модельная задача оптимизации свойств консольной пороупругой балки в классе дробно-рациональных функций и в классе полиномов

Предложенный выше метод был развит также для пороупругой балки в рамках математической модели пористой среды с пустыми порами — модель Нунзиато и Ковина [14, 15]. Исследованы задачи на податливость и изгиб. Рассмотрена постановка, в которой определяется оптимальное распределение модуля упругости скелета или модуля жесткости пор.

Переменными в этой модели являются компоненты вектора смещения среды и пористость, характеризующая отношение объема пустот к общему объему единичного элемента.

Определяющие соотношения в случае статического деформирования изотропных тел содержат пять механических параметров, два из которых совпадают с модулями классической теории упругости, а три других — дополнительные материальные константы теории пористых сред.

Задача на изгиб. Рассмотрим изгиб неоднородной пористой консольной балки с закрытыми порами на концах. На балку действует равномерно распределенная нагрузка q , изгибающий момент M_0 и поперечная сила P_0 , приложенные к свободному концу балки. Ось x направлена по нейтральной линии балки. Предполагаем, что механический модуль, характеризующий упругий модуль скелета есть функция от координаты x .

Краевая задача статического изгиба пороупругой балки после проведения процедуры обезмеривания имеет вид

$$\begin{aligned} (E(x)w'')'' - d_1\varphi'' &= q \\ b\varphi - \alpha\varphi'' - w'' &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} w(0) = w'(0) &= 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) &= 0 \\ Ew'' - d_1\varphi|_{x=1} &= M_0 \\ (Ew'')' - d_1\varphi'|_{x=1} &= P_0 \end{aligned}$$

Здесь w, φ — прогиб и пористость срединной линии балки соответственно, $E(x), d_1, \alpha, b$ — безразмерные функция и параметры, характеризующие модуль Юнга, модуль связности ($d_1 \in [0, 0.99]$), параметр диффузии пор ($a \in [0, 0.2]$) и модуль жесткости пор.

Рассмотрим оптимизационную задачу минимизации прогиба, математическая постановка которой может быть записана в виде

$$\int_0^1 E(x)dx = 1, |w(1)| \rightarrow \min_E, \quad (7)$$

Для решения поставленной задачи проинтегрируем дважды, с учетом граничных условий, первое дифференциальное уравнение (6), имеем

$$f(x) = q \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) + P_0(x-1) + M_0, v(x) = \frac{1}{E(x)} \quad (8)$$

$$w'' = d_1v(x)\varphi + v(x)f(x).$$

Подставим (8) во второе уравнение (6) и получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно функции пористости

$$\varphi'' + \frac{1}{\alpha}(d_1 v(x) - b)\varphi = -\frac{v(x)f(x)}{\alpha}.$$

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами линейное относительно $v(x)$. Будем разыскивать оптимальное распределение $v(x)$ в классе полиномов первой или второй степени, $v(x) = ax^2 + bx + c$, тогда функция пористости $\varphi(x) = F(a, b, c, x)$, далее, подставив найденное представление решения в (8), будем иметь функционал, который необходимо минимизировать по параметрам $w(1) = \int_0^1 \int_0^x (az^2 + bz + c)(d_1 F(a, b, c, z) + f(z)) dz dx \rightarrow \min_{a, b, c}$. Коэффициенты a, b, c могут быть найдены стандартными оптимизационными алгоритмами в области, определяемой дополнительными ограничениями, заданными в отношении управляющих функций.

На Рис. 2 изображены графики оптимальных распределений модуля Юнга для различных значений модуля жесткости пор b для случая $q = 0, P_0 = 0, M_0 = 1, \alpha = 0.1, d_1 = 0.5$. Так, при $b = 0.3, w_{opt}(1) = 0.688$, для сравнения, для однородной балки $w_0(1) = 0.75$; при $b = 1, w_{opt}(1) = 0.498$, для однородной балки $w_0(1) = 0.555$; при $b = 2, w_{opt}(1) = 0.471$, для однородной балки $w_0(1) = 0.526$. Во всех случаях выигрыш составляет порядка 10 %.

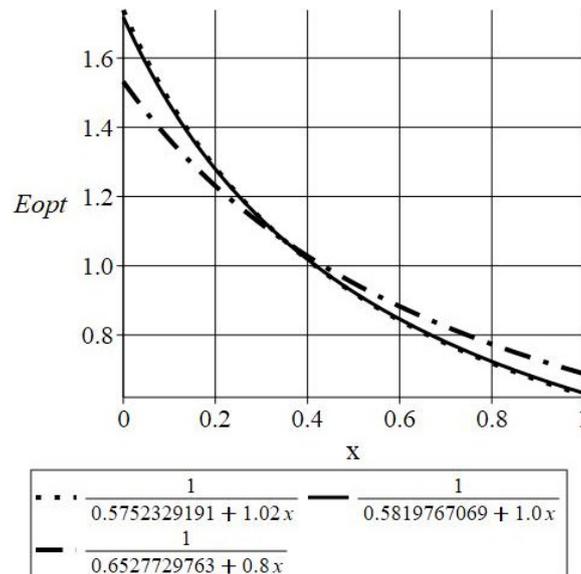


Рис. 2

Задача о растяжении. Рассмотрим растяжение неоднородной пористой консольной балки с закрытыми порами на концах под действием силы P_0 , приложенной к свободному концу балки. Предполагаем, что механический модуль, характеризующий упругий модуль скелета, а также характеристика, отвечающая за пористость среды — функции от координаты x .

Краевая задача о растяжении пороупругой балки после проведения процедуры обезразмеривания имеет вид

$$\begin{aligned} E(x)u' + d_1\varphi &= P_0 \\ \alpha\varphi'' - B(x)\varphi - u' &= 0 \\ u(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь u, φ — смещение и пористость срединной линии балки соответственно, переменными являются $E(x), B(x)$ — безразмерные функции характеризующие модуль Юнга и модуль жесткости пор.

Рассмотрим другой подход, позволяющий построить оптимальное решение в классе полиномов второй степени. Для исключения ситуации, когда оптимальная функция обращается в ноль на конце, добавим ограничения на разыскиваемые функции сверху и снизу.

Рассмотрим оптимизационную задачу минимизации смещения конца стержня, при ограничениях управляющих параметров снизу и сверху. Математическая постановка такой задачи может быть записана в виде

$$E_0 < E(x) < E_1, \quad B_0 < B(x) < B_1, \quad u(1) \rightarrow \min_{E,B}. \quad (10)$$

Решение оптимальной задачи будем разыскивать в классе полиномов второй степени. Краевая задача (9) не имеет аналитического решения, поскольку коэффициенты дифференциальных операторов переменные, поэтому используются численные методы решения поставленной задачи, в частности, метод пристрелки. Для отыскания коэффициентов, доставляющих минимальное смещение конца балки, используется генетический алгоритм, в качестве фитнес функции задается модуль, вычисляющий значение $u(1)$, входные параметры — полиномиальные коэффициенты.

Проведен вычислительный эксперимент, так при $a = 0.2$, $d_1 = 0.1$, $P_0 = 1$ получили оптимальные распределения, изображенные на рис. 3 — оптимальные модуль Юнга (сплошной линией) и пористости (штрихпунктирной линией). Отметим, что подход носит универсальный характер и может быть решен для большого спектра различных оптимизационных задач.

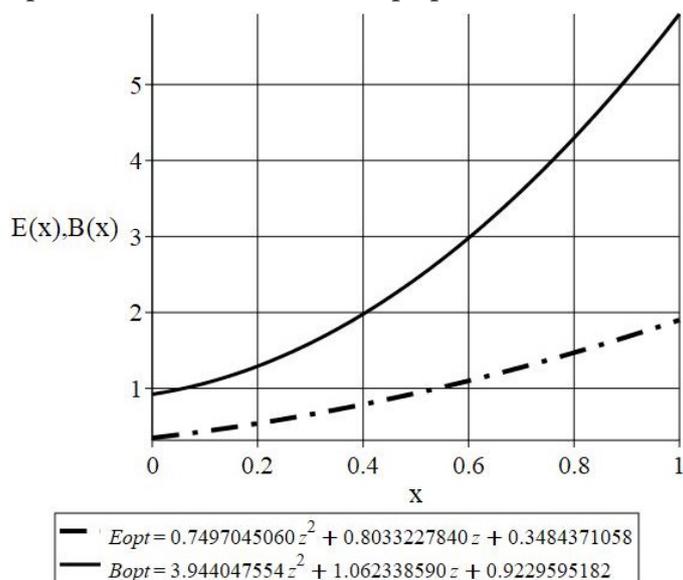


Рис. 3

Заключение

Предложены подходы к решению оптимизационных задач на податливость для упругой и пористой неоднородной консольной балки. Оптимальные решения разыскивались в классе полиномов при ограничении их поведения сверху и снизу или в классе дробно-рациональных функций при ограничении на их среднее значение.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> в Южном федеральном университете.

Литература

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
2. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. – М. : Наука, 1981. – 280 с.
3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam // Quarterly of Applied Mathematics. – 1965. – V. 23. – P. 47–53.
4. Гринев В. Б., Филипов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. – К. : Наукова думка, 1975. – 290 с.
5. Lei Duan, Zhao Jing. Vibration optimization of composite plates with multiple circular holes using two-dimensional sampling optimization method // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2023. – V. 155. – P. 1131–1148. doi: 10.1016/j.enganabound.2023.07.028
6. Jiang X., Zhang W., Liu C., Du Z., Guo X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures // Appl. Math. Model. – 2023. – V. 113. – P. 613–639. doi:10.1016/j.apm.2022.09.028
7. Zhou Y., Nomura T., Dede E. M., Saitou K. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2022. – V. 65, No 8. – P. 118. doi: 10.1007/s00158-022-03219-8.A
8. Levin V. A., Zingerman K. M., Vershinin A. V., Vasilyev P. A. Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity // Chebyshevskii Sbornik. – 2022. – V. 23, No 4. – P. 308–326. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326
9. Belardi V. G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2024. – Vol. 103. – 105189. doi: 10.1016/j.euromechsol.2023.105189
10. Ватульян А. О., Недин Р. Д. Об одной задаче оптимизации для преднапряженной пластины с переменной жесткостью // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 202–214. doi: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214
11. Ватульян А. О., Явруян О. В. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, – 2024. – Т. 24, № 4. – С. 552–566. doi:10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Некоторые аналитические решения в задачах оптимизации переменного коэффициента теплопроводности // Владикавказский математический журнал. – 2024. – Т. 26, № 3. – С. 33–46. doi: 10.46698/v9056-4395-2233-f.
13. Ватульян А. О., Юров В. О. О максимуме первой резонансной частоты для неоднородных упругих тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 180–192. doi: 10.31857/S1026351924040121
14. Nunziato J. W., Cowin S. C. A nonlinear theory of elastic materials with voids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1979. – V. 72, No 2. – P. 175–201. doi: 10.1007/BF00249363
15. Lyapin A. A., Vatulyan A. O. On deformation of porous plates // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 2018. – V. 98, No 6. – P. 330–340. doi: 10.1002/zamm.201700151